Probleme propuse

1. Fie punctele $A(2,-1)$ şi $B(-1,3)$. Să se determine numerele reale a şi b astfel încât $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

2. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,-8)$ şi $B(6,3)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

3. Să se determine numărul real a ştiind că vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ şi $\vec{v} = 3\vec{i} + (a-2)\vec{j}$ sunt coliniari.

4. În reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ se consideră vectorii $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u} + 3\vec{v}$.

5. Să se determine coordonatele punctului B, ştiind că $A(3,4)$ şi $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j}$.

6. Se consideră vectorii $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ şi $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{w} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$.

7. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, ştiind că A,B şi C sunt vârfurile unui triunghi.

8. Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc de centru O. Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$.

9. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2,-3)$ şi $\overrightarrow{OB}(1,-2)$. Să se determine numerele reale α şi β pentru care vectorul $3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB}$ are coordonatele (α, β).

10. Dacă $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$, să se determine valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$.

11. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2,-1)$ şi $\overrightarrow{OB}(1,2)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde M este mijlocul segmentului AB .

12. Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc de centru O. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AO}$.

13. Să se determine numărul real m pentru care vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{w} = -\vec{i} + m\vec{j}$ sunt coliniari.

Rezolvare:

1. Vectorul determinat de două puncte $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$ este $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\ \vec{j}$ şi se obţine $\overrightarrow{AB} = (-1-2)\vec{i} + (3-(-1))\vec{j} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$. Atunci *a*= - 3 şi *b*=4.

2. $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} - 8\vec{j}, \overrightarrow{OB} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$ şi obţinem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (4+6)\vec{i} + (-8+3)\vec{j} = 10\vec{i} - 5\vec{j}$. Coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ sunt (10, −5).

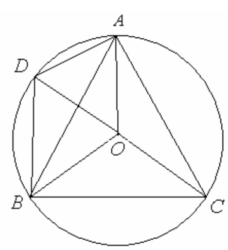
3. Doi vectori $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ şi $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ sunt coliniari dacă $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$. Obţinem:
$\frac{2}{3} = \frac{a}{a-2} \Rightarrow 3a = 2a - 4 \Rightarrow a = -4$.

4. $5\vec{u} + 3\vec{v} = 5(-3\vec{i} + 2\vec{j}) + 3(5\vec{i} - \vec{j}) = \cancel{-15\vec{i}} + 10\vec{j} \cancel{+15\vec{i}} - 3\vec{j} = 7\vec{j}$.

5. Punctul *B*(*x*,*y*) şi $\overrightarrow{AB} = (x-3)\vec{i} + (y-4)\vec{j}$. Atunci *x* – 3 = 1 şi *y* – 4 = 1 se obţine *x* = 4 şi *y* = 5 iar *B*(4,5).

6. $\vec{w} = 2\vec{v} - 3\vec{u} = 2(3\vec{i} + 4\vec{j}) - 3(2\vec{i} - 3\vec{j}) = \cancel{6\vec{i}} + 8\vec{j} \cancel{-6\vec{i}} + 9\vec{j} = 17\vec{j}$.

7. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ după regula triunghiului, iar $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ şi atunci
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

8. 

[*OA*] = [*OB*] = [*OC*] raza cercului circumscris

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$, regula paralelogramului
AOBD este romb şi Δ*AOD* este echilateral, atunci [*OA*]=[*OD*]
$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OC}$.

Avem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$.

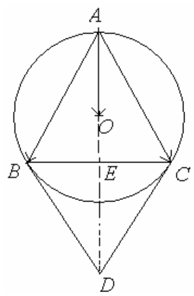
9. $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{OB} = \vec{i} - 2\vec{j}$, iar $3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB} = 3(2\vec{i} - 3\vec{j}) - 5(\vec{i} - 2\vec{j}) = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 5\vec{i} + 10\vec{j} = \vec{i} + 5\vec{j}$ şi atunci $\alpha = 1$ şi $\beta = 5$.

10. Din $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = 2$

11. Din M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow$

$$x_M = \frac{x_A + x_b}{2} \Rightarrow x_M = \frac{3}{2} \text{ şi } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \frac{1}{2},\ M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{şi } \overrightarrow{OM}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

12.



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ şi $ABDC$ romb $\Rightarrow AD = 2AE$ şi $AO = \frac{2}{3}AE \Rightarrow AE = \frac{3}{2}AO$, atunci $AD = 3AO \Rightarrow \overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{AO} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AO} = \vec{0}$.

13. $\frac{2}{-1} = \frac{3}{m} \Rightarrow 2m = -3 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$.