Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

ÚLOHA I (30 bodov)

5b **1.** Nájdite reálne číslo x pre ktoré čísla 5, $2x+3$, $2x+7$ sú za sebou idúce členy jednej aritmetickej postupnosti.

5b **2.** Ukážte, že pre ľubovoľné reálne číslo m, graf funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(m-1)x-m$ pretína os Ox.

5b **3.** Riešte v množine reálnych čísel rovnicu $\sqrt{2-x}=2x-1$.

5b **4.** Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že ak vyberieme jedno číslo z množiny $\{1,2,3,4,5\}$, potom preň platí vzťah $5^{n-1}>(n+1)!$.

5b **5.** Nájdite reálne čísla a i b, vediac, že v karteziánskej sústave xOy, prienik priamok $x+(2a+1)y-4=0$ i $3x+by-8=0$ je bod $M(a,-2)$.

5b **6.** Ukážte, že $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\operatorname{tg} x$, pre ľubovoľné reálne číslo $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

ÚLOHA II (30 bodov)

1. Je daný determinant $D(x,y)=\begin{vmatrix}1 & x & \frac{1}{x}\\ 1 & y & \frac{1}{y}\\ 1 & \frac{1}{2} & 2\end{vmatrix}$, kde x a y sú nenulové reálne čísla.

5b **a)** Ukážte, že $D\left(2,\dfrac{1}{2}\right)=0$.

5b **b)** Ukážte, že $D(x,y)=-\dfrac{1}{2xy}(2x-1)(2y-1)(x-y)$, pre ľubovoľné nenulové reálne čísla x a y.

5b **c)** Riešte v množine reálnych čísel rovnicu $D(\log_2 x,\,2)=0$.

2. Sú dané matice $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ a $A(a)=\begin{pmatrix}1&2&a\\a&1&2\\2&a&1\end{pmatrix}$, kde a je reálne číslo.

5b **a)** Ukážte, že $2A(1)-A(-1)=A(3)$.

5b **b)** Nájdite reálne čísla a i b, pre ktoré $A(a)+bI_3=2\big(A(1)-I_3\big)\big(A(1)-I_3\big)$.

5b **c)** Ukážte, že matica $A(n)$ je inverzovateľná pre ľubovoľné prirodzené číslo n.

ÚLOHA III (30 bodov)

1. Je daná funkcia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x}$ a postupnosť reálnych čísel $(a_n)_{n\ge1}$, $a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$.

5b **a)** Nájdite rovnicu vodorovnej asimptoty do $+\infty$ ku grafu funkcie f.

5b **b)** Ukážte, že postupnosť $(a_n)_{n\ge1}$ je rastúca.

5b **c)** Vypočítajte $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)(a_n-\ln n)$.

2. Je daná funkcia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+a+1, & x\le 1\\ x^2+a^2x, & x>1\end{cases}$, kde a je reálne číslo.

5b **a)** Nájdite reálne čísla a, pre ktoré funkcia f je spojitá v $x=1$.

5b **b)** Pre $a=2$, vypočítajte $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x)+x}\right)$.

5b **c)** Pre $a=-1$ ukážte, že rovnica $f(x)+2^x=0$ má aspoň jedno riešenie v intervale $[-1,0]$.