Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

ÚLOHA I (30 bodov)

5b	**1.** Je dané komplexné číslo $z = 4 - i$. Vypočítajte $z \cdot \overline{z} - z - \overline{z}$, kde $\overline{z}$ je komplexné združené číslo k číslu z.
5b	**2.** Určte reálne číslo m vediac, že os Ox je dotýčnicou ku grafu funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 - m + 2$.
5b	**3.** Riešte v množine reálnych čísel rovnicu $3\log_x 5 + \log_5(5x) = 5$.
5b	**4.** Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že ak vyberieme jedno číslo z množiny trojciferných prirodzených čísel, potom toto číslo je násobkom čísla 11.
5b	**5.** Je daný trojuholník ABC, bod M je stred strany BC a bod N je stred ťažnice AM. Dokážte, že $\overrightarrow{BN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
5b	**6.** Ukážte, že ak $(\sin x + 3\cos y)^2 + (\cos x - 3\sin y)^2 = 10$, kde $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, potom $x = y$.

ÚLOHA II (30 bodov)

	1. Je daný determinant $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & y+1 & 2 \\ x^2+x & y^2+y & 2 \end{vmatrix}$, kde x a y sú reálne čísla.
5b	**a)** Ukážte, že $\Delta(0,2) = -2$.
5b	**b)** Ukážte, že $\Delta(x,y) = (x-1)(y-1)(y-x)$, pre každé reálne čísla x a y.
5b	**c)** Dokážte, že číslo $\Delta(m,n)$ je deliteľné 2, pre každé celé čísla m i n.
	2. Je daná matica $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-1 & 0 & a \end{pmatrix}$, kde a je reálne číslo.
5b	**a)** Vypočítajte $A(0) + A(2)$.
5b	**b)** Ukážte, že $A(a)A(b) = A(2ab - a - b + 1)$, pre každé reálne čísla a i b.
5b	**c)** Ukážte, že $A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot \ldots \cdot A\left(\frac{2017}{2}\right) = A\left(\frac{1}{2}\right)$.

ÚLOHA III (30 bodov)

	1. Je daná funkcia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2 + 3x + 1}{x^3(x+1)^3}$.
5b	**a)** Ukážte, že $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$, pre každé $x \in (0, +\infty)$.
5b	**b)** Nájdite rovnicu vodorovnej asimptoty k $+\infty$ ku grafu funkcie f.
5b	**c)** Vypočítajte $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)\right)^{2n^3}$.

2. Je daná funkcia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2-x+a, & x\le 0 \\ \dfrac{e^{4x}-1}{e^{3x}-1}, & x>0 \end{cases}$, kde a je reálne číslo.

5b **a)** Vypočítajte $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

5b **b)** Nájdite reálne číslo a, pre ktoré funkcia f je spojitá v bode $x=0$.

5b **c)** Dokážte, že ak $a\in(-6,-3)$, potom rovnica $f(x)=0$ má najmenej dve rôzne reálne riešenia v intervale $(-3,-1)$.