Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

ÚLOHA I. (30 bodov)

5b	**1.** Určte komplexné číslo z vediac, že $2\overline{z}+iz=4+5i$, kde $\overline{z}$ je komplexne združené so z.
5b	**2.** Je daná funkcia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-2x$. Určte reálne hodnoty x, pre ktoré $(f\circ f)(x)<x$.
5b	**3.** Riešte v množine reálnych čísel rovnicu $3^{x^2+1}\cdot\sqrt[3]{27}=3^3$.
5b	**4.** Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že ak vyberieme jednu podmnožinu z dvojprvkových podmnožín množiny $A=\{0,1,2,3,4,5\}$, potom táto bude obsahovať iba parné čísla.
5b	**5.** Je daný obdĺžnik $ABCD$, v ktorom $AB=8$, $AD=4$ a bod M je stred strany CD. Vypočítajte dĺžku vektora $\vec{v}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BM}$.
5b	**6.** Nech $E(x)=\sin\frac{2x}{3}-\cos\frac{8x}{3}$, kde x je reálne číslo. Ukážte, že číslo $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$ je prirodzené.

ÚLOHA II. (30 bodov)

	1. Sú dané matice $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ i $A(a)=\begin{pmatrix}a^2+a&a^2-a&1\\a^2-a&a^2+a&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, kde a je reálne číslo.
5b	**a)** Ukážte, že $\det(A(-2))=-32$.
5b	**b)** Určte reálne hodnoty x, pre ktoré $\det(A(x)-xI_3)\geq 0$.
5b	**c)** V karteziánskej súradnicovej sústave xOy sú dané body $P_a\left(a^2+a,a^2-a\right)$, kde a je reálne číslo. Dokážte, že pre ľubovoľné nenulové reálne číslo a, body P_a, P_{-a} i O **nie** sú kolineárne.
	2. Je daná matica $M(x)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&2^x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, kde x je reálne číslo.
5b	**a)** Dokážte, že $M(x)\cdot M(-x)=M(0)$, pre ľubovoľné reálne číslo x.
5b	**b)** Vypočítajte inverznú maticu k $M(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
5b	**c)** Ukážte, že $\det(M(1)+M(2)+\ldots+M(n))=2n^2\left(2^n-1\right)$, pre ľubovoľné nenulové prirodzené číslo n.

ÚLOHA III. (30 bodov)

	1. Je daná funkcia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.
5b	**a)** Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.
5b	**b)** Určte rovnicu vodorovnej asimptoty do $+\infty$ ku grafu funkcie f.
5b	**c)** Dokážte, že postupnosť $(a_n)_{n\geq 1}$, kde $a_n=f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(n)$, je klesajúca.

2. Je daná funkcia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2^x+\sin(x-1)+m, & x\le 1 \\ \dfrac{\sqrt{3x-2}-1}{x^2-1}, & x>1 \end{cases}$, kde m je reálne číslo.

5b **a)** Ukážte, že $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\dfrac{3}{4}$.

5b **b)** Určte reálne číslo m, pre ktoré funkcia f je spojitá na $\mathbb{R}$.

5b **c)** Pre $m=-\dfrac{5}{4}$ dokážte, že rovnica $f(x)=0$ má aspoň jedno riešenie v intervale $(0,2)$.