Elemente de geometrie analitică

1. Segmente

1. Distanța dintre două puncte $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
2. Panta dreptei AB: $m_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
3. Coordonatele (x,y) ale mijlocului segmentului AB: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$
4. Coordonatele punctului M care împarte segmentul (AB) în raportul k:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}, y = \frac{y_1 + ky_2}{2}$$

2. Ecuația dreptei

1. Drepte paralele cu axele de coordonate: (d):$x = a$, $(d || Oy)$; (d):$y = b$, $(d || Ox)$
2. Dreapta determinată de punctul $M_o(x_o,y_o)$ şi vectorul nul $\overline{a}(u,v) : (d) : r = \overline{r_o} + t\overline{a}$, $t \in \mathbf{R}$,

$\overline{r_o}$ -vectorul de poziție a lui M_o; r-vectorul de poziție a unui punct M al dreptei d.

$$(d) : \begin{cases} x = x_o + ut \\ y = y_o + vt \end{cases}, \ t \in \mathbf{R}, \text{ ecuațiile parametrice;}$$

3. Ecuația explicită: $y = mx + n$ ($m \in \mathrm{R}^*$, $n \in \mathbf{R}$, m – panta, n – ordonata la origine);
4. Ecuația prin tăieturi: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0, (a, b \in \mathbf{R}^*)$;
5. Ecuația dreptei de pantă m, prin punctul $M_o(x_o,y_o)$: $y - y_o = m(x - x_o)$, $(m \neq 0)$;
6. Ecuația dreptei determinată de punctele $A(x_1,y_2)$, $B(x_2,y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, (x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2)$$

sau $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

7. Ecuația generală: $ax + by + c = 0$;
8. Aria triunghiului ABC ($A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$): $A_{ABC} = \dfrac{1}{2}|\Delta|$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ dacă } \Delta = 0 \text{ atunci } A, B, C \text{ sunt colineare}$$

9. Poziția relativă a dreptelor (d_1) şi (d_2):

$(d_1) : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $(d_2) : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$d_1 = d_2$, dacã $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$; $d_1 \,||\, d_2$, dacã $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$;

$d_1 \neq d_2$ şi $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$, dacã $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

10. Distanța de la punctul $M_o(x_o,y_o)$ la dreapta $(h): ax + by + c = 0$

$$d(M,h) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

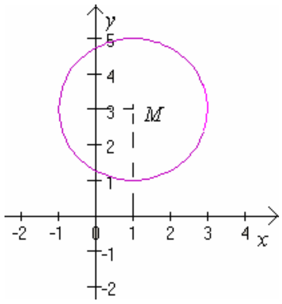
11. Unghiul α determinat de dreptele:

$$(d_1): y = m_1x + n_1 \text{ şi } (d_2): y = m_2x + n_2 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}, (m_1m_2 \neq -1)$$

$d_1 \perp d_2$, dacã $m_1m_2 = -1$

3. Cercul

Cercul C de centru $M(a,b)$ şi razã r:

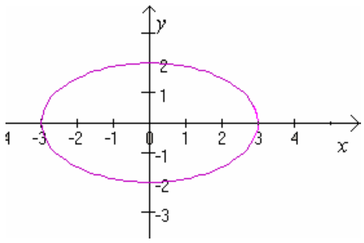


1. Ecuația cercului $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$;
   dacã $M(a,b) = O(0,0)$: $x^2 + y^2 = r^2$;
2. Ecuația generalã: $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, unde $a = -\dfrac{m}{2}$, $b = -\dfrac{n}{2}$ şi

   $r^2 = \dfrac{1}{4}(m^2 + n^2) - p$.

4. Conice raportate la axele de simetrie

1. Elipsa *E*: $F(c,0)$, $F'(-c,0)$, $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $B(0,b)$, $B'(0,-b)$, $MF + MF' = 2a$, $M \in \boldsymbol{E}$

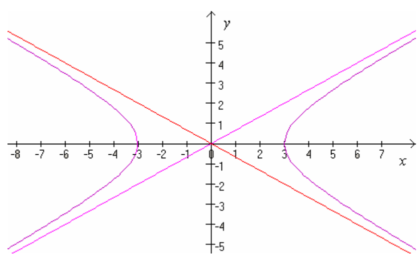


Ecuația elipsei: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0, b^2 + c^2 = a^2$

Ecuația tangentei în punctul $M(x_o,y_o)$, $M \in \boldsymbol{E}$:

$$\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} - 1 = 0$$

2. Hiperbola *H*: $F(c,0)$, $F'(-c,0)$, $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $|MF - MF'| = 2a$, $M \in \boldsymbol{H}$.

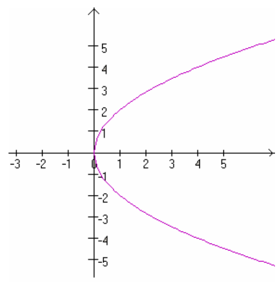


Ecuațiea hiperbolei: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0, c^2 - b^2 = a^2$

Ecuația tangentei în $M_o(x_o,y_o)$, $M_o \in \boldsymbol{H}$:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$$

3. **Parabola *P*:** $F(\dfrac{p}{2},0)$, $h: x = -\dfrac{p}{2}$ (h – dreapta directoare):



$d(M,h) = MF$, $M \in \boldsymbol{P}$.

Ecuația parabolei P: $y^2 = 2px$

Ecuația tangentei în $M_o(x_o,y_o)$, $M_o \in \boldsymbol{P}$: $yy_o = p(x + x_o)$

Probleme rezolvate

1. Se dă hiperbola H de ecuație:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-1=0$$

a) Să se afle ecuația tangentei la hiperbolă în punctul $T(2\sqrt{2},3)$.

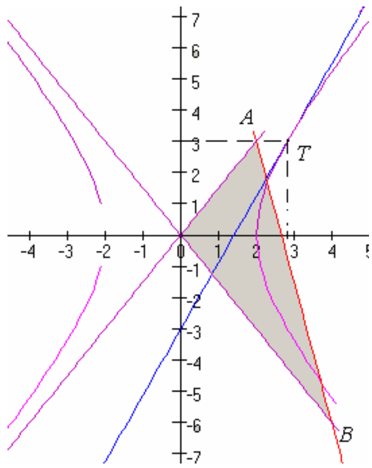
b) Să se calculeze aria triunghiului format de asimptotele hiperbolei H şi de dreapta de ecuație $9x+2y-24=0$.

R. a) Verificăm dacă $T\in H$: $\frac{8}{4}-\frac{9}{9}-1=0$

Ecuația tangentei se obține prin dedublarea ecuației hiperbolei:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1=0 \Rightarrow$$

$$t:\ \frac{2\sqrt{2}x}{4}-\frac{3y}{9}-1=0 \Rightarrow 3\sqrt{2}x-2y-6=0$$



b) Asimptotele $y=\pm\frac{b}{a}x$

Calculăm coordonatele punctelor de intersecție:

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x \\ 9x+2y-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \quad \text{A(2;3)}$$

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{2}x \\ 9x+2y-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-6 \end{cases} \quad \text{B(4;-6)}$$

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}(\Delta),\ \Delta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}=-24,\ S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot 24=12$$

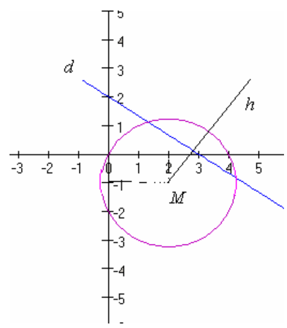
2. Se dă cercul de ecuație $x^2+y^2-4x+2y=0$. Să se scrie ecuația dreptei care trece prin centrul cercului dat şi este perpendiculară pe dreapta de ecuație $2x+3y-4=0$.

R. C: $x^2-4x+4+y^2+2y+1=5$

$(x-2)^2+(y+1)^2=5$

Centrul cercului $M_0(2,-1)$

d: $2x+3y-4=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3} \Rightarrow m_d=-2/3$



$m_h=-1/m_d=3/2$

h: $y-y_0=m_h(x-x_0) \Rightarrow y+1=\frac{3}{2}(x-2) \Rightarrow h$: $3x-2y-8=0$

3. Să se determine aria triunghiului ABC determinat de dreptele de ecuații:

(AB): $x-2y+4=0$

(BC): $2x+y+1=0$

(AC): $x+y+2=0$

R. $AB\cap BC=\{B\} \Rightarrow B$: $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 4x+2y+2=0 \end{cases}}_{5x\ \ /\ \ +6\ \ =0} \quad \begin{cases} x=-\frac{6}{5} \\ y=\frac{7}{5} \end{cases} \quad B\left(-\frac{6}{5},\frac{7}{5}\right)$

$AB \cap AC = \{A\} \Rightarrow A: \begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 2 = 0 \\ x = -2 - \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \quad A\left(-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$BC \cap AC = \{C\} \Rightarrow C: \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \quad C(1, -3)$

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$

$$\Delta = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{7}{5} & 1 \\ -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{121}{15} \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{121}{30}.$$

4. Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului *ABC*, unde vârfurile triunghiului au coordonatele
$A(2,5)$, $B(5,1)$ şi $C(-2,2)$.

R. Calculăm pantele dreptelor *AB* şi *AC*: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\left.\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{1-5}{5-2} = -\frac{4}{3} \\ m_{AC} &= \frac{2-5}{-2-2} = \frac{3}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_{AB} = -\frac{1}{m_{AC}} \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow \Delta ABC \text{ este dreptunghic} \Rightarrow \text{ centrul cercului}$$

circumscris este la mijlocul [BC].

M_0: $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3}{2}$

$$r = \frac{BC}{2} \Rightarrow r^2 = \frac{BC^2}{4} = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{4} = \frac{(5+2)^2 + (1-2)^2}{4} = \frac{50}{4}$$

$$C: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}.$$

5. Paralelogramul *ABCD* are vârfurile consecutive *A* şi *B* de coordonate $A(-3,-1)$ şi $B(2,\frac{11}{4})$. Se ştie că punctul $Q(3,\frac{1}{2})$ este intersecția diagonalelor paralelogramului. Să se afle coordonatele vârfurilor *C* şi *D* şi ecuația laturii *BC*.

R. Coordonatele mijlocului unui segment sunt: $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Q -mijlocul segmentului $AC \Rightarrow 3 = \frac{-3 + x}{2} \Rightarrow x=9$ şi $-\frac{1}{2} = \frac{-1 + y}{2} \Rightarrow y=0$. Atunci $C(9,0)$

Q -mijlocul segmentului $BD \Rightarrow 3 = \frac{2 + x}{2} \Rightarrow x=4$ şi $-\frac{1}{2} = \frac{\frac{11}{4} + y}{2} \Rightarrow y=-\frac{9}{4}$. Atunci $D(4, -\frac{9}{4})$

Ecuația dreptei *CD*: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

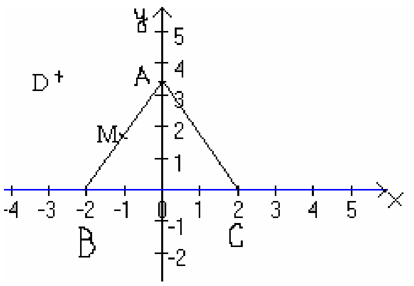
$$\frac{y-0}{-\frac{9}{4}-0}=\frac{x-9}{4-9}\Rightarrow\frac{4y}{-9}=\frac{x-9}{-5}\Rightarrow 20y=9x-81\ \Rightarrow\ CD\text{: } 9x\text{-}20y\text{-}81=0.$$

6. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A\left(0,2\sqrt{3}\right)$, $B(-2,0)$, $C(2,0)$.

a) Să se reprezinte punctele şi să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

b) Să se determine coordonatele punctului D, simetricul lui C faţă de dreapta AB. Să se scrie ecuaţia cercului de centru D şi care trece prin A.

R. a) Prin calcul $BC=4=AB=AC\Rightarrow\Delta ABC$ echilateral.



b) Fie $D(u,v)$ simetricul lui C faţă de AB şi M mijlocul lui $[AB]\Rightarrow M(-1,\sqrt{3})$ este mijlocul segmentului $[DC]$. Atunci

$$-1=\frac{u+2}{2};\ \sqrt{3}=\frac{v+0}{2},\ \text{de unde } u=-4; v=2\sqrt{3}\Rightarrow D(-4,2\sqrt{3}).$$

Cercul care trece prin A şi are centrul în D este $C(D,r)$, unde

$$r=AD=\sqrt{(-4-0)^2+\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)^2}=4.$$

Deci C: $(x+4)^2+(y-2\sqrt{3})^2=16$.

7. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0,3)$ şi $B(-6,0)$.

a) Scrieţi ecuaţiile medianelor duse din A şi B, determinaţi coordonatele lui G, centrul de greutate al triunghiului AOB. Reprezentaţi punctele şi dreptele.

b) Care este poziţia centrului cercului circumscris; dar a ortocentrului triunghiului AOB ? Demonstraţi că aceste două puncte şi G sunt coliniare.

R. a) Fie ΔAOB şi M, respectiv N mijloacele segmentelor $[AO]$, respectiv $[BO]$, atunci $M\left(0,\frac{3}{2}\right)$ şi $N(-3,0)$ şi BM: $y=\frac{1}{4}(x+6)$, iar AN: $y=\frac{3}{3}(x+3)$ ecuaţiile medianelor din B, respectiv A şi cum $\{G\}=BM\cap AN\Rightarrow G(-2,1)$.

b) Cum $A\in Oy$ şi $B\in Ox\Rightarrow\Delta AOB$ e dreptunghic în O, deci centrul cercului circumscris e la mijlocul Q al ipotenuzei $[AB]\Rightarrow Q(-3,\frac{3}{2})$ iar ortocentrul ΔAOB e $O(0,0)$ şi cum

$$d=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ -3 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -3 & \frac{3}{2}\end{vmatrix}=-3+3=0$$ deci punctele Q,O şi G sunt coliniare.

8. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,0)$ şi $B(0,2)$.

a) Să se determine coordonatele punctului D, mijlocul segmentului $[AB]$. Scrieţi ecuaţia mediatoarei d a segmentului $[AB]$.

b) Să se determine coordonatele următoarelor puncte: $\{E\}=d\cap OB$, $\{F\}=d\cap OA$, M mijlocul segmentului $[AE]$ şi N mijlocul segmentului $[BF]$. Să se verifice dacă dreptele MD şi ND sunt perpendiculare. Dar MO şi ON?

R. a) a) $D\left(\frac{3+0}{2},\frac{0+2}{2}\right)$, deci $D\left(\frac{3}{2},1\right)$ şi $m_{AB}=\frac{2-0}{0-3}=-\frac{2}{3}$;

$$d: y-1=-\frac{1}{-\frac{2}{3}}\left(x-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow d: y=\frac{3}{2}x-\frac{15}{4}$$

b) $\{E\}=d\cap OB$, unde $OB=Ox\Rightarrow E\left(\frac{5}{6},0\right)$; $\{F\}=d\cap OA$, unde $OA=Oy\Rightarrow F\left(0,-\frac{5}{4}\right)$

M mijlocul lui $[AE]$ $\Rightarrow M\left(\frac{23}{12},0\right)$; N mijlocul lui$[BF]$ $\Rightarrow N\left(0,\frac{3}{8}\right)$.

$m_{MD}=\frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{23}{12}}=-\frac{24}{5}$, iar $m_{ND}=\frac{\frac{3}{8}-1}{0-\frac{3}{2}}=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$ şi $m_{MD}\cdot m_{ND}\neq -1 \Rightarrow MD$ şi ND nu sunt perpendiculare.

$MO=Ox$, iar $ON=Oy$ şi cum $Ox\perp Oy \Rightarrow MO\perp ON$.

9. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră elipsele de ecuaţii: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ şi $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

Pentru fiecare elipsă să se scrie ecuaţia tangentei în punctul de abscisă 2 şi ordonata pozitivă. Să se arate că cele două tangente se intersectează într-un punct situat pe axa Ox. Reprezentaţi grafic elipsele şi tangentele.

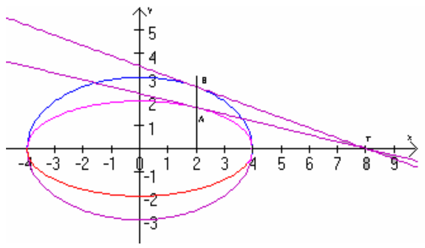
R. a) Coordonatele punctelor: $A\left(2,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ pentru E_1, $B\left(2,\sqrt{3}\right)$ pentru E_2

Ecuaţiile tangentelor:

$t_1:\frac{x}{8}+\frac{y\sqrt{3}}{6}=1$, pentru E_1, $t_2:\frac{x}{8}+\frac{y\sqrt{3}}{4}=1$, pentru E_2

Intersecţia tangentelor: $T(8,0)$

Reprezentarea grafică:



10. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră elipsele de ecuaţii: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ şi $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

Pentru fiecare elipsă să se scrie ecuaţia tangentei în punctul de abscisă 3 şi ordonata negativă. Să se arate că cele două tangente se intersectează într-un punct situat pe axa Ox. Reprezentaţi grafic elipsele şi tangentele.

R. a) . Pentru $x=3$ şi $y<0$ se obţine $\frac{9}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow y=-\frac{12}{5}$, adică $A\left(3,-\frac{12}{5}\right)\in E_1$

De ecuaţie $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, respectiv $B\left(3,-\frac{8}{5}\right)\in E_2$ de ecuaţie $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.

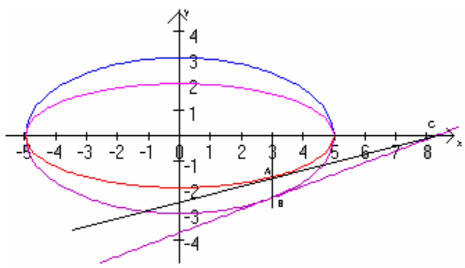
Tangenta t_1 în A la E_1 are ecuaţia $t_1:\frac{3x}{25}-\frac{12y}{5\cdot 9}=1$,

adică $9x-20y=75$

Tangenta t_2 în B la E_2 are ecuaţia $t_2:\frac{3x}{25}-\frac{8y}{5\cdot 9}=1$,

adică $27x-40y=225$

$t_1\cap t_2=\{C\}$, unde $C\left(\frac{25}{3},0\right)\in Ox$.



11. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră triunghiul care are laturile pe dreptele:
(AB): $2x+3y-7=0$
(BC): $x-4y+13=0$

(AC): $4x-5y-3=0$

a) Determinați coordonatele vârfurilor triunghiului. Reprezentați triunghiul ABC.

b) Scrieți ecuațiile mediatoarelor segmentelor $[AB]$ și $[BC]$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

R.a) $AB\cap AC=\{A\}$, A: $\begin{cases}2x+3y-7=0\\4x-5y-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$;

$AB\cap BC=\{B\}$, B: $\begin{cases}2x+3y-7=0\\x-4y+13=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$;

$BC\cap AC=\{C\}$, C: $\begin{cases}x-4y+13=0\\4x-5y-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7\\y=5\end{cases}$.

b) Centrul cercului se găsește la intersecția mediatoarelor laturilor $[AB]$ și $[BC]$.

M: $\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}=2\end{cases}$, N: $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$.

Ecuațiile mediatoarelor: $y-y_0=m(x-x_0)$

Pantele: $m_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{2}{-3}$; $m_{BC}=\dfrac{1}{4}$; $m_{MM_0}=-\dfrac{1}{m_{AB}}=\dfrac{3}{2}$; $m_{NM_0}=-\dfrac{1}{m_{BC}}=-4$

Ecuațiile mediatoarelor: MM_0: $y-2=\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$; $NM_0: y-4=-4(x-3)$

Coordonatele centrului cercului se obține rezolvând sistemul format din cele două ecuații:

$M_0:\begin{cases}y-2=\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\\ y-4=-4(x-3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{59}{22}\\ y=\dfrac{58}{11}\end{cases}$.

12. În sistemul cartezian xOy se consideră cercul C de ecuație: $x^2+y^2=16$ și punctul $A(1,2)$.

a) Determinați centrul și raza cercului. Precizați, prin calcul, poziția punctului A față de cerc. Reprezentați cercul.

b) Scrieți ecuația dreptei d care trece prin A și centrul cercului. Fie $M(a,b)$ un punct pe cerc. Determinați punctul M astfel încât tangenta la cerc în M să fie paralelă cu dreapta d.

R.a) Din ecuația C: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ avem $x_0=0$, $y_0=0$, $r=4$

$d(O,A)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}<4\Rightarrow A\in\mathrm{Int}C$.

b) $m_{OA}=2$, ecuația dreptei OA: $y-y_0=m(x-x_0)$

d: $y=2x$.

Ecuația tangentei la cerc: $xx_0+yy_0=r^2$ și din $M(a,b)$ obținem: $ax+by=16$ care are panta

$m_t=-\dfrac{a}{b}$ egală cu $m_{OA}\Rightarrow a=-2b$.

Din $M\in C\Rightarrow a^2+b^2=16$

Avem: $4b^2+b^2=16\Rightarrow b=\pm\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$; $a=\mp\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

13. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(5,0)$, $B(1,4)$ și dreapta d de ecuație $x+y-3=0$.

a) Reprezentați dreapta și punctele. Scrieți ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$ și determinați intersecția ei cu dreapta d.

b) Să se stabilească ecuația cercului care trece prin A, B și are centrul pe dreapta d.

R.a) M_0:$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=3$, $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=2$; $m_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$, $m_{med}=1$

med: $y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-2=x-3$

Intersecția cu dreapta d este punctul C care se obține rezolvând sistemul format din ecuațiile dreptei d şi a mediatoarei.

$$C:\ \begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

b) Centrul cercului se află în punctul $C(2,1)$, iar raza $r=CA=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{10}$

Ecuația cercului C: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

$(x-2)^2+(y-1)^2=10 \Rightarrow x^2+y^2-4x-2y-5=0$.

14. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreapta d de ecuație $4x+3y-12=0$.

a) Determinați coordonatele punctelor A şi B, intersecțiile dreptei d cu axele Ox, respectiv Oy. Reprezentați dreapta. Precizați panta dreptei AB.

b) Ştiind că $[AB]$ este latura unui trapez dreptunghic $ABCD$, cu $m(\hat{A})=90^0$ şi $BC||AD$, având toate vârfurile pe axele de coordonate, scrieți ecuațiile dreptelor BC şi CD.
Determinați coordonatele punctelor C şi D.

R. a) $d\cap Ox$ $y=0 \Rightarrow x=3$ $A(3,0)$

$d\cap Oy$ $x=0 \Rightarrow y=4$ $B(0,4)$, $m_{AB}=-\dfrac{4}{3}$

b) $AD\perp AB \Rightarrow m_{AD}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow AD$: $y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y=\dfrac{3}{4}(x-3)$

D: $x=0 \Rightarrow y=-\dfrac{9}{4}$ $D(0,-\dfrac{9}{4})$

$BC\perp AB \Rightarrow m_{BC}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow BC$: $y-4=\dfrac{3}{4}x$

C: $y=0 \Rightarrow x=-\dfrac{16}{3}$ $C\left(-\dfrac{16}{3},0\right)$

15. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctul $B(1,4)$ şi dreptele d_1, d_2 de ecuații d_1: $x+y-5=0$, d_2: $x-y-1=0$.

a) Să se determine coordonatele lui A, punctul de intersecție al celor două drepte. Reprezentați dreptele şi calculați lungimea segmentului $[AB]$.

b) Scrieți ecuația cercului de centru A şi care trece prin B.

R.

a) $A:\begin{cases} x+y-5=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$; $A(3,2)$

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

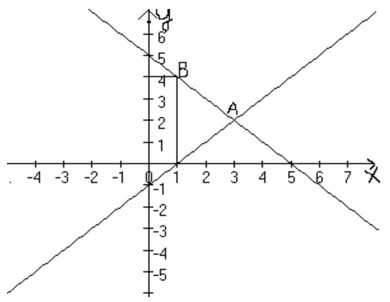
$AB=2\sqrt{2}$

b) $r^2=8$

C: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

$(x-3)^2+(y-2)^2=8$

$x^2+y^2-6x-4y+5=0$



16. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(-2,0)$ şi $C(3,0)$.

a) Reprezentați punctele şi calculați distanțele BC şi AC.

b) Să se scrie ecuațiile mediatoarelor segmentelor $[AB]$ şi $[BC]$.
Determinați centrul şi raza cercului circumscris triunghiului ABC.

R. a) $d(B,C)=5$; $d(A,C)=\sqrt{4^2+3^2}=5$

b) $M(-1,2)$ e mijlocul lui $[AB]$ şi $m_{AB}=\dfrac{4-0}{0-(-2)}=2$.

Ecuația mediatoarei lui [AB] este a: $y-2=-\frac{1}{2}(x+1)$.

$N\left(\frac{1}{2},0\right)$ e mijlocul lui [BC] şi m_{BC}=0. Ecuația med. lui [BC] este b: $x=\frac{1}{2}$.

Fie G centrul cercului circumscris $\Delta ABC \Rightarrow \{G\}=a\cap b$.

Din $\begin{cases} y-2=-\frac{1}{2}(x+1) \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$, iar raza cercului circumscris e $r=\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

17. . În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctul $M(2,3)$ şi dreptele d_1,d_2 de ecuații d_1: $x+y-2=0$ şi d_2: $3x-2y+1=0$.

Se notează cu A, punctul de intersecție al dreptelor d_1 şi d_2.

a) Să se determine coordonatele punctului A. Să se reprezinte grafic dreptele d_1 şi d_2.
b) Să se scrie ecuația dreptei AM.
c) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin A şi este paralelă cu prima bisectoare.

R. a) $\{A\}=d_1\cap d_2 \Rightarrow A\left(\frac{3}{5},\frac{7}{5}\right)$

b) AM: $y-3=\dfrac{3-\frac{7}{5}}{2-\frac{3}{5}}(x-2) \Rightarrow 8x-7y+5=0$.

c) Prima bisectoare: $y=x$ cu $m=1$

Dreapta d paralelă cu prima bisectoare ce trece prin $A \Rightarrow d: y-\frac{7}{5}=1\cdot\left(x-\frac{3}{5}\right)$ sau $5x-5y+4=0$.

18. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctul $M(5,0)$ şi elipsa de ecuație $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

a) Reprezentați elipsa şi precizați, prin calcul, poziția punctului M față de elipsă.
b) Să se determine coordonatele punctelor P situate pe elipsă, astfel încât tangenta în P la elipsă să treacă prin M. Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă. Determinați pantele tangentelor.

R. a) $A(4,0)$; $A'(-4,0)$; $B(0,3)$; $B'(0,-3)$, AA' axa mare şi BB' axa mică

Pentru $M(5,0)$ avem: $\frac{5^2}{16}+\frac{0}{9}=\frac{25}{16}>1 \Rightarrow M\in$exteriorului elipsei.

b) Fie $P(u,v)\in E \Rightarrow \frac{u^2}{16}+\frac{v^2}{9}=1$ (*)

Tangenta în P: $\frac{ux}{16}+\frac{vy}{9}=1$ care conține pe $M(0,5)$ de unde $\frac{5u}{16}+\frac{0\cdot v}{9}=1 \Rightarrow u=\frac{16}{5}$ şi apoi din (*) $\Rightarrow$ $v_1=-\frac{9}{5}$ şi $v_2=\frac{9}{5}$, deci există două puncte cu proprietatea cerută: $P_1\left(\frac{16}{5},-\frac{9}{5}\right)$ şi $P_2\left(\frac{16}{5},\frac{9}{5}\right)$.

Tangenta în P_1 e t_1: $\frac{x}{5}-\frac{z}{5}=1$ cu panta m_1=1

Tangenta în P_2 e t_2: $\frac{x}{5}+\frac{z}{5}=1$ cu panta m_1=-1.

19. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ şi $B(1,4)$.

a) Să se determine ecuația cercului C de centru A şi care trece prin B. Reprezentați cercul C.
b) Să se scrie ecuațiile tangentelor la cerc în punctele care au abscisa x=-1.
Să se arate că tangentele sunt paralele cu axa Ox.

R. a) $r=AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, C: $(x+1)^2+(y-2)^2=8$

b) Dacă $x=-1 \Rightarrow (y-2)^2=8 \Rightarrow y-2=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow T_1(-1,2-2\sqrt{2})$; $T_2(-1,2+2\sqrt{2})$.

Ecuația tangentei în T_1: $(x+1)(-1+1)+(y-2)(2-2\sqrt{2}-2)=8 \Rightarrow y=2-2\sqrt{2}$

Ecuația Tangentei în T_2: $(x+1)(-1+1)+(y-2)(2+2\sqrt{2}-2)=8 \Rightarrow y=2+2\sqrt{2}$.