Demonstrarea unor inegalităţi

Proprietăţi ale funcţiilor derivabile

Definiţie: Fie $f:I\to\mathbf{R}$, cu $I\subset\mathbf{R}$, interval.

1. Spunem că punctul $x_0\in I$ este un **punct de maxim local** strict pentru f, dacă există o vecinătate U a lui x_0, astfel încât: $f(x)<f(x_0),\ \forall x\in U\cap\left(I\setminus\{x_0\}\right)$.

2. . Spunem că punctul $x_0\in I$ este un **punct de minim local** strict pentru f, dacă există o vecinătate U a lui x_0, astfel încât: $f(x)>f(x_0),\ \forall x\in U\cap\left(I\setminus\{x_0\}\right)$.

Teorema lui Fermat:

Fie $f:I\to\mathbf{R}$ derivabilă pe I. În orice punct extrem local din interiorul lui I, f' este nulă.

Teorema lui Rolle:

Dacă funcţia continuă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este derivabilă pe (a,b) şi $f(a)=f(b)$ atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=0$.

Teorema lui Lagrange:

Dacă funcţia continuă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este derivabilă pe (a,b), atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Consecinţe ale Teoremei lui Lagrange:

1. Fie $f:E\to\mathbf{R}$ o funcţie derivabilă şi $I\subset E$ un interval.
   - Dacă $\forall x\in I$, avem $f'(x)>0$, atunci funcţia este strict crescătoare pe I.
   - Dacă $\forall x\in I$, avem $f'(x)<0$, atunci funcţia este strict descrescătoare pe I.
2. Fie $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ o funcţi derivabilă şi $\boldsymbol{c}\in(a,b)$. Dacă f' se anulează în $\boldsymbol{c}$ schimbându-şi semnul, atunci $\boldsymbol{c}$ este un punct de extrem local pentru f.

Teoremă. Dacă funcţia f este continuă şi derivabilă pe I (I – interval deschis), atunci:

1. între două rădăcini consecutive ale funcţiei există cel puţin o rădăcină a derivatei;
2. între două rădăcini consecutive ale derivatei există cel mult o rădăcină a funcţiei.

Teorema lui Cauchy:

Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ continue pe $[a,b]$, derivabile pe (a,b) şi $g'(x)\neq0$, $\forall x\in(a,b)$ atunci $\exists c\in(a,b)$ astfel încât $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Funcţii convexe şi funcţii concave

1. O funcţie este convexă pe un interval real (a,b), dacă pentru $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ graficul funcţiei pe intervalul (x_1,x_2) este situat sub segmentul de dreaptă care uneşte punctele $(x_1,f(x_1))$ şi $(x_2,f(x_2))$.
2. O funcţie este concavă pe un interval real (a,b), dacă pentru $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ graficul funcţiei pe intervalul (x_1,x_2) este situat desupra segmentului de dreaptă care uneşte punctele $(x_1,f(x_1))$ şi $(x_2,f(x_2))$.

Propoziţia

1. Dacă funcţia f are derivată de ordinul al doilea strict pozitivă ($f'(x)>0$) pe intervalul (a,b), atunci f este strict convexă pe (a,b).

2. Dacă funcţia f are derivată de ordinul al doilea strict negativă ($f''(x)<0$) pe intervalul (a,b), atunci f este strict concavă pe (a,b).

Probleme rezolvate

Problema 1. Să se compare numerele e^{π} şi π^{e}.

Rezolvare: Se consideră funcţia $f:[e,+\infty)\to \mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

Derivata funcţiei f, $f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-(\ln x)\cdot x'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ este negativă pentru orice $x\in(e,+\infty)$ şi f este continuă pe $[e,+\infty)$ rezultă că funcţia f este strict descrescătoare pe $[e,+\infty)$. Atunci , cum $e<\pi$ se obţine

$$f(e)>f(\pi)\Rightarrow \frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}\Rightarrow \pi\ln e>e\ln\pi\Rightarrow \ln e^{\pi}>\ln\pi^{e}\Rightarrow e^{\pi}>\pi^{e}.$$

Problema 2. Să se studieze mărginirea şirului $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\ (n\ge 1)$.

Rezolvare: Demonstrăm inegalitatea: $\ln(1+x)\le x,\ (x\ge 0)$. (1)

Considerăm funcţia
$f:[0,+\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=x-\ln(1+x)$.
Funcţia este continuă pe domeniul de definiţie şi
$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x},\ \forall x\in(0,+\infty)$. Atunci $f'(x)>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$, prin urmare funcţia este strict crescătoare pe domeniul de definiţie, adică $f(x)\ge f(0)$, $\forall x\in(0,+\infty)$, de unde obţinem inegalitatea (1).

În inegalitatea (1) se consideră $x=\dfrac{1}{n},\ (n=1,2,\ldots)$ şi se obţine:

$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\le\dfrac{1}{n}\Leftrightarrow \ln(n+1)-\ln n\le\dfrac{1}{n},\ (n=1,2,\ldots.)$. De aici se deduce:

$$\ln 2-\ln 1\le 1$$
$$\ln 3-\ln 2\le\frac{1}{2}$$
$$\ln 4-\ln 3\le\frac{1}{3}$$
....
$$\ln(n+1)-\ln n\le\frac{1}{n}$$

Se însumează inegalitățile și se obține: $\ln(n+1)\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$. Cum

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$, din ultima inegalitate rezultă $+\infty\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$, adică șirul este nemărginit.

Problema 3. Pentru orice $x > -1$, $\alpha > 1$are loc inegalitatea (inegalitatea J.Bernoulli):

$$(1+x)^{\alpha}\ge 1+\alpha x.$$

Rezolvare: Considerăm funcția $f:[-1,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x$, unde $\alpha >1$.

Calculăm derivata funcției: $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha=\alpha\left((1+x)^{\alpha-1}-1\right)$. Deoarece $\alpha >1$ rezultă că $f'(x)<0$ pentru $x\in(-1,0)$ și $f'(x)<0$ pentru $x\in(0,\infty)$ și atunci funcția f este descrescătoare pe $[-1,0]$ și crescătoare pe $[0,\infty)$. Atunci punctul $x=0$ este punct de minim, adică $f(x) > f(0)\Rightarrow (1+x)^{\alpha}-1-\alpha x>1-1$, sau

$(1+x)^{\alpha}>1+\alpha x,\ \forall x\in[-1,0)\cup(0,+\infty),\ \alpha>1$. Pentru $x=0$ se obține egalitatea $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x$.

Problema 4. Dacă $p,q\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$ au proprietatea $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, a,b numere pozitive, atunci sunt adevărate inegalitățile: $ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^p}{q}$ (pentru $p>1$) și $ab\ge\frac{a^p}{p}+\frac{b^p}{q}$ (pentru $p<1$).

Rezolvare: Considerăm cazul $p > 1$. Fixăm numărul pozitiv a și luăm funcția

$f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(b)=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}-ab$. Derivata acestei funcții este:

$f'(b)=b^{q-1}-a$ și determinăm monotonia.

$f'(b)=0\Rightarrow b^{q-1}-a=0\Rightarrow b^{q-1}=a\Rightarrow b=a^{\frac{1}{q-1}}$. Pentru $0<b<a^{\frac{1}{q-1}}\Rightarrow f'(b)<0$ și funcția este descrescătoare, iar pentru $a^{\frac{1}{q-1}}<b\Rightarrow f'(b)>0$, funcția este crescătoare și atunci $b=a^{\frac{1}{q-1}}$ este un punct de minim local. Deci $f(b)\ge f\left(a^{\frac{1}{q-1}}\right),\ (b>0)$.

Ținând cont de $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ se obține $\frac{a^p}{p}+\frac{b^p}{q}-ab\ge 0$. Analog se demonstrează și cazul $p < 1$.

Problema 5. Să se demonstreze inegalitatea: $|\sin x|\le|x|,\ \forall x\in\mathbf{R}$.

Rezolvare: Considerăm funcțiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=|\sin x|$, $g(x)=|x|$, funcții pare și atunci este suficient discutarea cazului $x \ge 0$. Din $|\sin x|\le 1$ se restrânge la cazul $0\le x\le 1$.

Luăm funcţia $h:[0,1]\to \mathbf{R},\ h(x)=x-\sin x$. Derivata funcţiei *h*, $h'(x)=1-\cos x$, $h'(x)\geq 0$ datorită mărginirii funcţiei cosinus $(|\cos x|\leq 1,\ \forall x\in\mathbf{R})$, atunci funcţia *h* este funcţie crescătoare şi are loc inegalitatea $f(x)\geq f(0)$ sau $x-\sin x\geq 0,\ \forall x\in[0,1]$, de unde $\sin x\leq x,\ \forall x\in[0,1]$. Ţinând cont de paritatea funcţiilor *f* şi *g* şi de mărginirea funcţiei sinus obţinem: $|\sin x|\leq |x|,\ \forall x\in\mathbf{R}$.

Problema 6. Fie funcţia $f: I\to$R convexa pe *I*. Atunci pentru orice $x_j\in I$ ($j = 1,\dots,n$) si orice $\lambda_j\geq 0$ ($j = 1,\dots,n$); $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=1$ are loc inegalitatea

$$f\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\right)\leq \sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(x_j).$$

Rezolvare: Vom demonstra prin inducţie. Pentru $n=2$ inegalitatea este adevarată conform definiţiei convexităţii. Să presupunem că pentru un $n\geq 2$ inegalitatea este adevarată şi în cazul în care *f* este strict convexă, se verifică cu egal când variabilele au valori egale şi o demonstrăm pentru $n+1$. Avem, pentru $\lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_{n+1}>0$, $\lambda_1+\lambda_2+\dots +\lambda_{n+1}=1$, $x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\in I$,

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots \lambda_{n+1}x_{n+1})=$$

$$=f\left(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots\lambda_{n-1}x_{n-1}+(\lambda_n+\lambda_{n+1})\frac{\lambda_nx_n+\lambda_{n+1}x_{n+1}}{\lambda_n+\lambda_{n+1}}\right)\leq$$

$$\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\dots+\lambda_{n-1}f(x_{n-1})+(\lambda_n+\lambda_{n+1})\,f\left(\frac{\lambda_nx_n+\lambda_{n+1}x_{n+1}}{\lambda_n+\lambda_{n+1}}\right)\leq$$

$$\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\dots+\lambda_{n-1}f(x_{n-1})+(\lambda_n+\lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\lambda_{n+1}}f(x_n)+\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n+\lambda_{n+1}}f(x_{n+1})\right)=$$

$$=\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\dots+\lambda_{n+1}f(x_{n+1}).$$

Dacă *f* este strict convexă, atunci avem egalitate când sunt verificate simultan condiţiile $x_1=x_2=\dots=x_{n-1}=\dfrac{\lambda_nx_n+\lambda_{n+1}x_{n+1}}{\lambda_n+\lambda_{n+1}}$ şi $x_n=x_{n+1}$ ceea ce înseamnă $x_1=x_2=\dots=x_{n+1}$.

Problema 7. Pentru orice numere nenegative $x_1,x_2,\dots,x_n$ este adevărată inegalitatea:

$$\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\quad\text{(inegalitatea Cauchy).}$$

Rezolvare: Dacă unul dintre numerele numerele x_j, ($j\in\{1,\dots,n\}$) este 0, atunci inegalitatea este evidentă.

Fie x_j, ($j\in\{1,\dots,n\}$). Considerăm funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=\ln x$. Calculăm derivate a doua: $f'(x)=\dfrac{1}{x},\ f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0\Rightarrow$ funcţia este concavă pe mulţimea $(0,\infty)$. Pe baza inegalităţii Jensen deducem:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\ln x_j\leq\ln\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}x_j\right)\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}\ln x_j^{\frac{1}{n}}\leq\ln\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}x_j\right)\Rightarrow\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}.$$

Problema 8. Fie $x_1,\dots,x_n$ numere nenegative. Să se arate că funcţia

$$f:[0,+\infty)\to\mathbf{R},\ f(\alpha)=\left(\frac{x_1^{\alpha}+\ldots+x_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

este monoton crescătoare.

Rezolvare: Fie $0<\alpha<\beta$. Considerăm funcţia $h(x)=x^{\frac{\beta}{\alpha}}$, ($x\geq 0$). Calculăm derivata a doua: $h'(x)=\frac{\beta}{\alpha}x^{\frac{\beta}{\alpha}-1}$, $h''(x)=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)x^{\frac{\beta}{\alpha}-2}>0$, rezultă că h este convexă pe $[0,+\infty)$. Conform inegalităţii lui Jensen deducem:

$$h\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}x_j^{\alpha}\right)\leq\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}h\left(x_j^{\alpha}\right)$$

sau

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}x_j^{\alpha}\right)\leq\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}x_j^{\alpha}$$

de unde se obţine $f(\alpha)\leq f(\beta)$, funcţie crescătoare.

Problema 9. Să se arate că

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

unde α,β,γ sunt unghiuri interioare unui triunghi.

Rezolvare: Considerămfuncţia $f:[0,\pi]\to\mathbf{R},\ f(x)=\sin x$. Cum $f''(x)=-\sin x$ şi $f''(x)<0$ pentru orice $x\in(0,\pi]$, rezultă că f este o funcţie concavă pe $[0,\pi]$. Pe baza inegalităţii Jensen se obţine:

$$f\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{3}\right)\geq\frac{1}{3}f(\alpha)+\frac{1}{3}f(\beta)+\frac{1}{3}f(\gamma),$$

sau

$$\sin\frac{\pi}{3}\geq\frac{1}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma),$$

adică

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Problema 10. Să se demonstreze ca este adevarată inegalitatea (inegalitatea Göughens)

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geq\left(1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\right)^n,$$

unde $a_j\geq 0$ ($j\in\{1,2,\ldots,n\}$).

Rezolvare: Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\ln\left(1+e^x\right)$. Determinăm convexitatea acestei funcţii. Derivata a doua: $f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$, $f''(x)=\frac{e^x\left(1+e^x\right)-e^x\cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{e^x+\left(e^x\right)^2-\left(e^x\right)^2}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}>0$

$\Rightarrow$ funcţia este convexă pe $\mathbf{R}$ şi aplicăm inegalitatea lui Jensen:

$$f\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\ln a_j\right)\le\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\ln a_j\right)\Leftrightarrow\ln\left(1+e^{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\ln a_j}\right)\le\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+a_j\right)\Leftrightarrow$$

$$n\ln\left(1+\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\right)\le\ln\left(\left(1+a_1\right)\ldots\left(1+a_n\right)\right)\Leftrightarrow\left(1+a_1\right)\ldots\left(1+a_n\right)\ge\left(1+\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\right)^n.$$