1. MATRICI

1.1. Despre matrici

Acest concept s-a întalnit înca din clasele de gimnaziu, atunci când s-a pus problema rezolvarii unui sistem de două ecuații cu două necunoscute *x*, *y*, de forma $\begin{cases} ax+by=c \\ a^{'}x+b^{'}y=c^{'} \end{cases}$.

Acestui sistem i s-a asociat un tablou pătratic, care conține coeficienții necunoscutelor (în prima linie sunt coeficienții lui *x*, *y* din prima ecuație, iar în a doua linie figurează coeficienții lui *x*, *y* din ecuația a doua): $\begin{pmatrix} a & b \\ a^{'} & b^{'} \end{pmatrix}$.

Am numit acest tablou matrice pătratică (sau matricea sistemului). Pe cele două coloane ale matricei figurează coeficienții lui *x* (pe prima coloană *a*,*a'*) şi respectiv coeficienții lui *y* (pe a doua coloană *b*,*b'*).

Definiție. Se numeşte **matrice cu** *m* **linii şi** *n* **coloane** (sau de tip $m\times n$) un tablou cu *m* linii şi *n* coloane

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ale cărui elemente a_{ij} sunt numere complexe.

Uneori această matrice se notează şi $A=\left(a_{ij}\right)$ unde $i=\overline{1,m}$ şi $j=\overline{1,n}$. Pentru elementul a_{ij}, indicele *i* arată linia pe care se află elementul, iar al doilea indice *j* indică pe ce coloană este situat.

Mulțimea matricilor de tip $m\times n$ cu elemente numere reale se notează prin $M_{m,n}\left(\mathbf{R}\right)$. Aceleaşi semnificații au şi mulțimile $M_{m,n}\left(\mathbf{Z}\right), M_{m,n}\left(\mathbf{Q}\right), M_{m,n}\left(\mathbf{C}\right)$.

Cazuri particulare

1) O matrice de tipul $1\times n$ (deci cu o linie şi *n* coloane) se numeşte **matrice linie** şi are forma

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

2) O matrice de tipul $m\times 1$ (cu *m* linii şi o coloană) se numeşte **matrice coloană** şi are forma

$$B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

3) O matrice de tip $m\times n$ se numeşte **nulă** (**zero**) dacă toate elementele ei sunt zero. Se notează cu $O_{m,n}$

$$O_{m,n}=\begin{pmatrix}0 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 0\end{pmatrix}.$$

4) Dacă numărul de linii este egal cu numărul de coloane, atunci matricea se numeşte **pătratică**.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Sistemul de elemente $\left(a_{11}\ \ a_{22}\ \ ...\ \ a_{nn}\right)$ reprezintă **diagonala principală** a matricii A, iar suma acestor elemente $a_{11}+\ a_{22}\ +\ ...\ +\ a_{nn}$ se numeşte **urma matricii** A notată $Tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{i\,i}$. Sistemul de elemente $\left(a_{1n}\ \ a_{2\,n-1}\ \ ...\ \ a_{n1}\right)$ reprezintă **diagonala secundară** a matricii A.

Mulţimea acestor matrici se notează $M_n\left(\mathbf{C}\right)$. Printre aceste matrici una este foarte importantă aceasta fiind

$$I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix}$$

şi se numeşte **matricea unitate** (pe diagonala principală are toate elementele egale cu 1, iar în rest sunt egale cu 0).

1.2. Operații cu matrici

1.2.1. *Egalitatea a două matrici*

<u>Definiție.</u> Fie $A=\left(a_{i\,j}\right), B=\left(b_{i\,j}\right)\in M_{m,n}\left(\mathbf{C}\right)$. Spunem că matricile A, B **sunt egale** şi scriem $A=B$ dacă $a_{i\,j}=b_{i\,j}$, $\left(\forall\right)\ i=\overline{1,m}, \left(\forall\right)\ j=\overline{1,n}$.

Exemplu: Să se determine numerele reale x, y astfel încât să avem egalitatea de matrici

$$\begin{pmatrix}x+1 & x+y\\ 0 & x-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -x-1\\ 0 & 9-2x\end{pmatrix}.$$

R. Matricile sunt egale dacă elementele corespunzătoare sunt egale, adică:

$$\begin{cases}x+1=2\\ x+y=-x-1\\ 0=0\\ x-2y=9-2x.\end{cases}$$

Rezolvând acest sistem găsim soluția $x=1$, $y=-3$.

1.2.2. *Adunarea matricilor*

Definiție. Fie $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right), C=\left(c_{ij}\right)\in M_{m,n}\left(\mathbf{C}\right)$. Matricea C se numeşte **suma** matricilor A, B dacă: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $\left(\forall\right)\ i=\overline{1,m}, \left(\forall\right)\ j=\overline{1,n}$.

Observații

1) Două matrici se pot aduna dacă **sunt de acelaşi tip**, adică dacă au acelaşi număr de linii şi acelaşi număr de coloane, deci $A, B\in M_{m,n}\left(\mathbf{C}\right)$.

2) Explicit adunarea matricilor A, B înseamnă:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemplu: Să se calculeze $A + B$ pentru:

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

R. 1. Avem

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & -1+5 & 2-3 \\ 3+10 & 0+1 & 1+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 13 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Avem

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.=\begin{pmatrix} 1+0 & 1+1 \\ -1+1 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proprietăți ale adunării matricilor

$\mathbf{A_1}$ **(Asociativitatea adunării).** Adunarea matricilor este **asociativă**, adică:

$$\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right),\ \left(\forall\right)A, B, C\in M_{m,n}\left(\mathbf{C}\right).$$

$\mathbf{A_2}$ **(Comutativitatea adunării).** Adunarea matricilor este **comutativă**, adică:

$$A+B=B+A,\ \left(\forall\right)A, B\in M_{m,n}\left(\mathbf{C}\right).$$

$\mathbf{A_3}$ **(Element neutru).** Adunarea matricilor admite matricea nulă ca **element neutru**, adică $\exists\, O_{m,n}\in M_{m,n}\left(\mathbf{C}\right)$ astfel încât $A+O_{m,n}=A,\ \left(\forall\right)A\in M_{m,n}\left(\mathbf{C}\right)$.

$\mathbf{A_4}$ **(Elemente opuse).** Orice matrice $A\in M_{m,n}\left(\mathbf{C}\right)$ are un opus, notat $-A$, astfel încât

$$A+\left(-A\right)=O_{m,n}.$$

1.2.3. *Înmulțirea cu scalari a matricilor*

Definiție. Fie $\lambda\in\mathbf{C}$ şi $A=\left(a_{ij}\right)\in M_{m,n}\left(\mathbf{C}\right)$. Se numeşte **produsul dintre scalarul** $\lambda\in C$ **şi matricea** A, matricea notată $\lambda A\in M_{m,n}\left(\mathbf{C}\right)$ definită prin $\lambda A=\left(\lambda a_{ij}\right)$.

Obs.: A înmulți o matrice cu un scalar revine la a înmulți toate elementele matricii cu acest scalar.

Deci $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$.

Exemplu Fie $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & 5 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $6A = \begin{pmatrix} 3 & -18 & 30 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Proprietăți ale înmulțirii matricilor cu scalari

S$_1$ $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, $(\forall)\ \lambda, \mu \in \mathbf{C}, (\forall)\ A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$;

S$_2$ $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, $(\forall)\ \lambda \in \mathbf{C}, (\forall)\ A, B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$;

S$_3$ $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$, $(\forall)\ \lambda, \mu \in \mathbf{C}, (\forall)\ A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$;

S$_4$ $1 \cdot A = A$, $1 \in \mathbf{C}, (\forall)\ A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$;

1.2.4. *Înmulțirea matricilor*

<u>Definiție</u>. Fie $A = (a_{ki}) \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbf{R})$. **Produsul dintre matricile** A şi B (**în aceasta ordine**), notat AB este matricea $C = (c_{kj}) \in M_{m,p}(\mathbf{C})$ definită prin

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ij},\ (\forall)\ k = \overline{1,m}, (\forall)\ j = \overline{1,n}.$$

Observații

1) Produsul AB a două matrici nu se poate efectua întotdeauna decât dacă $A \in \mathrm{M}_{m,n}(R)$, $B \in \mathrm{M}_{n,p}(R)$, adică **numărul de coloane ale lui** A **este egal cu numărul de linii ale lui** B, când se obține o matrice $C = AB \in \mathrm{M}_{m,p}(R)$.

2) Dacă matricile sunt pătratice $A, B \in \mathrm{M}_n(R)$ atunci are sens întotdeauna atât AB cât şi BA, iar, în general, $AB \neq BA$ adică înmulțirea matricilor **nu este comutativă**.

Proprietăți ale înmulțirii matricilor

I$_1$ (Asociativitatea înmulțirii). Înmulțirea matricilor este asociativă, adică

$$(AB)C = A(BC), (\forall) A \in M_{m,n}(\mathbf{C}), (\forall) B \in M_{n,p}(\mathbf{C}), (\forall) C \in M_{p,s}(\mathbf{C}).$$

I$_2$ (Distributivitatea înmulțirii în raport cu adunarea). Înmulțirea matricilor este distributivă în raport cu adunarea matricilor, adică

$(A+B)C = AC + BC,\ C(A+B) = CA + CB,\ (\forall)A, B, C$ matrici pentru care au sens operațiile de adunare şi înmulțire.

I$_3$ Dacă $I_n \in M_n(\mathbf{C})$ este matricea unitate, atunci

$$I_n A = A I_n = A,\ (\forall) A \in M_n(\mathbf{C}).$$

Se spune că I_n este **element neutru** în raport cu operația de înmulțire a matricilor.

1.2.5. *Puterile unei matrici*

<u>Definiție</u>. Fie $A \in M_n(\mathbf{C})$. Atunci $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$, …, $A^n = A^{n-1} \cdot A, (\forall)\ n \in N^*$. (Convenim $A^0 = I_2$).

Probleme rezolvate

1. În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbf{R}$.

a) Să se calculeze A^3 , unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

b) Să se verifice dacă $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab)$, oricare ar fi numerele $a, b \in \mathbf{R}$.

c) Să se calculeze suma $X(1) + X(2) + X(3) + ... + X(2009)$.

R. a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 - 6 \cdot 2 & 4 \cdot (-6) - 6 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 & 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = A$ şi

$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$.

b) $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2^2 + I_2 bA + aAI_2 + ab\underbrace{A^2}_{=A} =$

$= I_2 + bI_2A + aAI_2 + abA = I_2 + aA + bA + abA = I_2 + (a + b + ab)A = X(a + b + ab)$.

c) $X(1) + X(2) + X(3) + ... + X(2009) =$

$= \underbrace{(I_2 + A) + (I_2 + 2A) + (I_2 + 3A) + ... + (I_2 + 2009A)}_{2009\, termeni} =$

$= 2009 I_2 + \underbrace{(1 + 2 + 3 + ... + 2009)}_{= \frac{n(n+1)}{2}} A = 2009 I_2 + \dfrac{2009 \cdot 2010}{2} A =$

$= 2009(I_2 + 1005A) = 2009 \cdot X(1005)$.

2. Se consideră inelul $(\mathbf{Z}_6, +, \cdot)$, unde $\mathbf{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$

a) Să se rezolve ecuația $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1}$, $x \in \mathbf{Z}_6$.

b) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ în $\mathbf{Z}_6$.

c) Să se rezolve în $\mathbf{Z}_6$ sistemul de ecuații $\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{4} \\ x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$.

R. a) Tabla adunării în $\mathbf{Z}_6$ şi tabla înmulțirii în $\mathbf{Z}_6$:

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

$\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}\big|+\hat{1} \Rightarrow \hat{2}x=\hat{2}\Rightarrow x\in\{\hat{1},\hat{4}\}$.

b) $\begin{vmatrix}\hat{1} & \hat{2} & \hat{3}\\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1}\\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{1} & \hat{2} & \hat{1}+\hat{2}+\hat{3}\\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{2}+\hat{3}+\hat{1}\\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{3}+\hat{1}+\hat{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{1} & \hat{2} & \hat{0}\\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{0}\\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{0}\end{vmatrix}=\hat{0}$

c) $\begin{cases}\hat{2}x+y=\hat{4}\\ x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}\overset{\text{Regula lui Cramer}}{\Rightarrow} d=\begin{vmatrix}\hat{2} & \hat{1}\\ \hat{1} & \hat{2}\end{vmatrix}=\hat{2}\cdot\hat{2}-\hat{1}\cdot\hat{1}=\hat{4}-\hat{1}=\hat{3}$,

$d_x=\begin{vmatrix}\hat{4} & \hat{1}\\ \hat{5} & \hat{2}\end{vmatrix}=\hat{4}\cdot\hat{2}-\hat{1}\cdot\hat{5}=\hat{2}-\hat{5}=-\hat{3}=\hat{3}$, $d_y=\begin{vmatrix}\hat{2} & \hat{4}\\ \hat{1} & \hat{5}\end{vmatrix}=\hat{2}\cdot\hat{5}-\hat{4}\cdot\hat{1}=\hat{4}-\hat{4}=\hat{0}$

$\Rightarrow x=d_x:d=\hat{3}:\hat{3}\Rightarrow x\in\{\hat{1},\hat{3},\hat{5}\}$ şi $y=d_y:d=\hat{0}:\hat{3}\Rightarrow y\in\{\hat{0},\hat{2},\hat{4}\}$. Se verifică soluțiile şi se obține $S=\{(\hat{1},\hat{2}),(\hat{3},\hat{4}),(\hat{5},\hat{0})\}$.

3. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}x-3 & 1\\ 1 & x-3\end{pmatrix}$, $x\in\mathbf{R}$. Se notează $A^2=A\cdot A$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se determine x real, ştiind că $\det(A)=0$.
b) Să se verifice egalitatea $A^2=(2x-6)A-(x^2-6x+8)\cdot I_2$.
c) Să se determine $x\in\mathbf{R}$ pentru care $A^2=2A$.

R. a) $\det(A)=\begin{vmatrix}x-3 & 1\\ 1 & x-3\end{vmatrix}=(x-3)^2-1\Rightarrow(x-3)^2-1=0\Rightarrow(x-3)^2=1\Rightarrow x-3=\pm1$ şi $x\in\{2,4\}$.

b) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}x-3 & 1\\ 1 & x-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3 & 1\\ 1 & x-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(x-3)^2+1 & x-3+x-3\\ x-3+x-3 & 1+(x-3)^2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}x^2-6x+10 & 2x-6\\ 2x-6 & x^2-6x+10\end{pmatrix}$.

$(2x-6)A-(x^2-6x+8)\cdot I_2=(2x-6)\begin{pmatrix}x-3 & 1\\ 1 & x-3\end{pmatrix}-(x^2-6x+8)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}(2x-6)(x-3) & 2x-6\\ 2x-6 & (2x-6)(x^2-6x+8)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x^2-6x+8 & 0\\ 0 & x^2-6x+8\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}2x^2-12x+18-x^2+6x-8 & 2x-6\\ 2x-6 & 2x^2-12x+18-x^2+6x-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2-6x+10 & 2x-6\\ 2x-6 & x^2-6x+10\end{pmatrix}$
$=\mathbf{A^2}$.

c) Din $A^2=(2x-6)A-(x^2-6x+8)\cdot I_2$ şi $A^2=2A$ avem $(2x-6)A-(x^2-6x+8)\cdot I_2=2A$ şi avem $\begin{cases}2x-6=2\Rightarrow x=4\\ x^2-6x+8=0\Rightarrow16-24+8=0\end{cases}$. Soluția $x=4$.

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze matricea B^2, unde $B^2 = B \cdot B$.

b) Să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

c) Să se arate că $C^4 = 6^4 \cdot I_2$, unde $C = B^2 + A^{-1}$ şi $C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C$.

R. a) $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot1\\ 1\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

b) A^{-1} este inversa matricei A dacă $A \cdot A^{-1} = I_2$. Calcuăm

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot3+4\cdot(-2) & 3\cdot(-4)+4\cdot3\\ 2\cdot3+3\cdot(-2) & 2\cdot(-4)+3\cdot3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2.$$

c) Din punctul **a)** se obține $B^2 = A$ şi atunci

$C = A + A^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 6\cdot I_2$ şi atunci

$C^4 = (6\cdot I_2)^4 = 6^4 \cdot I_2^4 = 6^4 \cdot I_2$.

5. Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Definim matricele

$A = X\cdot Y^t$ şi $B(a) = aA + I_3$, unde $a\in\mathbf{R}$ şi Y^t este transpusa matricei Y.

a) Să se arate că matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ 3 & 6 & -9\end{pmatrix}$.

b) Să se calculeze determinantul matricei A.

c) Să se arate că matricea $B(a)$ este inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

R. a) $Y^t = \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}$ şi $A = X\cdot Y^t = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ 3 & 6 & -9\end{pmatrix}$.

b) În matricea A liniile (coloanele) sunt proporționale şi determinantul matricei A este nul (det(A)=0).

c) $B(a) = aA + I_3 = a\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ 3 & 6 & -9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+1 & 2a & -3a\\ 2a & 4a+1 & -6a\\ 3a & 6a & -9a+1\end{pmatrix}$

$\det(B(a)) = (a+1)(4a+1)(-9a+1) - 36a^3 - 36a^3 + 9a^2(4a+1) +$

$+36a^2(a+1) - 4a^2(-9a+1) =$

$-36a^3 + 4a^2 - 45a^2 + 5a - 9a + 1 - 36a^3 - 36a^3 + 36a^3 + 9a^2 + 36a^2 + 36a^3 - 4a^2 = -4a + 1$.

O matrice este inversabilă dacă determinantul matricei este nenul $\Rightarrow$ det(B(a))$\neq$0$\Rightarrow$

- 4a+1$\neq$0 $\Rightarrow$ $a \neq \frac{1}{4}$. Matricea B(a) este inversabilă, oricare ar fi $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

6. În mulțimea $M_2(\mathbf{Z})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine numerele întregi a, b, c, d astfel încât $A + 2I_2 = O_2$.

b) Să se calculeze determinantul matricei $B = A - A^t$.

c) Să se arate că, dacă $A + A^t = 2I_2$, atunci determinantul matricei $A - A^t$ este un număr divizibil cu 4.

R. a) $A + 2I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 & b \\ c & d+2 \end{pmatrix}$, se obține: a+2 = 0, b = 0, c = 0, d + 2 = 0, atunci a = -2, b = 0, c = 0, d = -2

b)

$$B = A - A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \text{şi} \det(B) = 0 - (b-c)(c-b) = (b-c)^2.$$

c) $A + A^t = 2I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1, c = -b, d = 1 \Rightarrow$

det(b) = (b –(-b))^2 = (2b)^2 = 4b^2 care este multiplu de 4.

7. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Se notează $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{de\ n\ ori}$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se arate că $A^2 + A^3 = O_2$.

c) Să se calculeze suma A+ 2· A^2 +...+10· A^{10}.

R. a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$.

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6 & -12+18 \\ 2-3 & -6+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = -A$ şi $A^3 = A^2 \cdot A =$

$= -A \cdot A = -A^2$ şi $A^2 + A^3 = A^2 - A^2 = O_2$.

c) Din **b)** $A^3 = -A^2 = -(-A) = A$, $A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = -A$, ..., $A^{10} = -A$.

Suma cerută A+ 2· A^2 +...+10· A^{10} = A −2·A + 3·A −4·A + . . . −10·A =

(1−2+3−4+5−6+7−8+9−10)A= =(25 − 30)A = −5A.

8. Se consideră matricele $U = (0\ \ 0)$, $X = (x\ \ y)$ şi $V = \begin{pmatrix} v & 9 \\ 1 & v \end{pmatrix}$ cu $v,x,y \in \mathbf{R}$.

a) Să se arate că dacă $X \cdot V = U$, atunci $x \cdot (v^2 - 9) = 0$.

b) Să se determine valorile reale ale numărului v pentru care determinantul matricei V este nenul.

c) Să se determine trei soluții distincte ale sistemului de ecuații $\begin{cases} 3x+y=0 \\ 9x+3y=0 \end{cases}$.

R. a) $X \cdot V = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v & 9 \\ 1 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xv+y & 9x+yv \end{pmatrix}$ şi se obține

$\begin{cases} xv+y=0 \Rightarrow y=-xv \\ 9x+yv=0 \Rightarrow 9x-xv^2=0 \end{cases}$ şi din ecuația a doua se obține

$x \cdot (9-v^2)=0 \Big| \cdot (-1) \Rightarrow x \cdot (v^2-9)=0$.

b) $\det(V) = \begin{vmatrix} v & 9 \\ 1 & v \end{vmatrix} = v^2-9$ şi $v^2-9=0 \Rightarrow v^2=9 \Rightarrow v_{1,2}=\pm 3$.

c) Sistemul este omogen şi are soluția banală $S_1=(0,0)$. Dacă determinantul matricei sistemului este nul, sistemul are şi soluții nebanale: $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A)=9-9=0$ şi din prima ecuație obținem
$y = -3x$ şi soluția sistemului va fi $S=\{(x, -3x), x\in\mathbf{R}\}$. Luăm $x_1=1$, $y_1=-3$, $x_2=2$, $y_2=-6$, $x_3=-1$, $y_3=3$.

9. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se notează cu $X \cdot X = X^2$.

a) Să se verifice că $A = I_3 + B$.

b) Să se calculeze suma $A^2 + B^2$.

c) Să se calculeze inversa matricei A^2 .

R. a) $I_3+B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=A$

b) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1+1 & 1+1+1 \\ 0 & 1 & 1+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi

$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A^2+B^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Inversa unei matrice $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$, unde A^* este matricea adjunctă şi

$\left(A^2\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(A^2\right)} \cdot \left(A^2\right)^*$.

Calculăm determinantul matricei A^2: $\det\left(A^2\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, matricea A^2 este inversabilă.

Scriem transpusa matricei A^2: ${}^t\left(A^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculăm matricea adjunctă:

$\left(A^2\right)_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\left(A^2\right)_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$, $\left(A^2\right)_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$,

$\left(A^2\right)_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\left(A^2\right)_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\left(A^2\right)_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$, ,

$\left(A^2\right)_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\left(A^2\right)_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\left(A^2\right)_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$. şi

$\left(A^2\right)^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinantul matricei A^2 fiind 1, atunci

$\left(A^2\right)^{-1} = \left(A^2\right)^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$. Se notează $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{de\ n\ ori}$.

a) Să se calculeze $A^2 + A$.

b) Ştiind că $A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru oricare $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, să se rezolve ecuația $\det(A^n) = 2 \cdot 5^n - 125$.

c) Să se determine transpusa matricei $B = A + A^2 + \ldots + A^{2009}$.

R. a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A^2 + A = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $\det\left(A^n\right) = \begin{vmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5^n \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 5^n$ şi ecuația va fi:

$5^n = 2 \cdot 5^n - 125 \Rightarrow 5^n - 2 \cdot 5^n = -125 \Rightarrow 5^n = 125 \Rightarrow 5^n = 5^3 \Rightarrow n = 3$.

c) $B = A + A^2 + \ ...\ + A^{2009} \overset{din\ b)}{=} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 5^{2009} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{5+5^2+...+5^{2009}}_{\substack{\text{progresie geometrică cu } b_1=5 \\ \text{şi } q=5,\ S_n=b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}}} & 0 \\ 0 & \underbrace{1+1+...+1}_{2009\ termeni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot\dfrac{5^{2009}-1}{5-1} & 0 \\ 0 & 2009 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{4}\left(5^{2009}-1\right) & 0 \\ 0 & 2009 \end{pmatrix}.$$

Transpusa matricei B este ${}^tB = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{4}\left(5^{2009}-1\right) & 0 \\ 0 & 2009 \end{pmatrix}$ $=B$ deoarece elementele diagonalei a doua sunt aceleaşi.

12. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ în $M_2(\mathbf{R})$.

a) Să se verifice că $AB = BA$.

b) Să se calculeze $A^2 + B^2$, unde $A^2 = A \cdot A$ şi $B^2 = B \cdot B$.

c) Să se arate că $C^4 = 5^4 \cdot I_2$, unde $C = A + B$ şi $C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C$.

R. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 & -2+2 \\ 8-8 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$ şi

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 & 8-8 \\ -2+2 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \Rightarrow AB = BA$.

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+8 \\ 2+8 & 4+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$, iar

$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+4 & -8-2 \\ -8-2 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$. Calculăm

$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = 25 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5^2 \cdot I_2$.

c) $C = A + B \Rightarrow C^2 = (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \overset{\substack{punctul \\ a)}}{=} A^2 + B^2 \overset{\substack{punctul \\ b)}}{=} 5^2 \cdot I_2$ şi atunci

$C^2 = C^2 \cdot C^2 = \left(5^2 \cdot I_2\right) \cdot \left(5^2 \cdot I_2\right) = 5^4 \cdot I_2^2 = 5^4 \cdot I_2$.

14. Se consideră mulțimea $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbf{Z}, a^2 = 1 \right\}$.

a) Să se verifice dacă matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi respectiv $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparțin mulțimii G.

b) Să se determine matricea $B \in M_2(\mathbf{Z})$ astfel încât $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} = aI_2 + bB$, oricare $a,b \in \mathbf{Z}$.

c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G este tot o matrice din G.

R. a) Pentru $a = 1$ şi $b = 0$, $a^2 = 1$ avem $I_2 \in G$, iar pentru $a = 0$ şi $b = 0$, $a^2 \neq 1 \Rightarrow O_2 \notin G$.

b) $B \in M_2(\mathbf{Z}) \Rightarrow B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, x, y, z, t \in \mathbf{Z}$ şi

$aI_2 + bB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bx & by \\ bz & bt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bx & by \\ bz & a+bt \end{pmatrix}$ şi obținem sistemul

$\begin{cases} a+bx = a+b \\ by = b \\ bz = -b \\ a+bt = a-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \\ t = -1 \end{cases}$ şi matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Calculăm determinantul matricei A: $d = (a+b)(a-b) + b^2 = a^2 - b^2 + b^2 = a^2 = 1 \neq 0$ şi atunci există A^{-1}; matricea transpusă

${}^tA = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ şi $A_{11} = (-1)^{1+1}(a-b) = a-b$, $A_{12} = (-1)^{1+2} b = -b$,

$A_{21} = (-1)^{2+1}(-b) = b$, $A_{22} = (-1)^{2+2}(a+b) = a+b$;

matricea adjunctă $A^* = \begin{pmatrix} a-b & -b \\ b & a+b \end{pmatrix}$. Matricea inversă $A^{-1} = \frac{1}{d} A^* \Rightarrow A^{-1} = A^* \in G$.

15. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi funcția $f: M_3(\mathbf{R}) \to M_3(\mathbf{R})$, $f(X) = X^2 - 3X + I_3$, unde $X^2 = X \cdot X$.

a) Să se calculeze $\det(I_3 + B)$.

b) Să se demonstreze că $f(A) = I_3 + B$.

c) Să se arate că $(f(A))^3 = I_3 + 3B + 3B^2$, unde $(f(A))^3 = f(A) \cdot f(A) \cdot f(A)$.

R. a) $I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\det(I_3 + B) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

b) $f(A) = A^2 - 3A + I_3$, $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$f(A) = A^2 - 3A + I_3 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

iar $I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $f(A) = I_3 + B$.

c) Calculăm $\left(f\left(A\right)\right)^3 = f\left(A\right) \cdot f\left(A\right) \cdot f\left(A\right) \overset{\substack{punctul \\ b)}}{=} \left(I_3 + B\right)^3 = I_3^3 + 3I_3^2 B + 3I_3 B^2 + B^3$ şi

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \text{ şi atunci}$$

$$\left(f\left(A\right)\right)^3 = I_3 + 3I_3 B + 3B^2 + O_3 = I_3 + 3B + 3B^2.$$

16. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{Z},\ a^2 - 3b^2 = 1 \right\} \subset M_2\left(\mathbf{Z}\right)$.

a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin G$

b) Să se arate că pentru orice două matrice $A,B \in G$ are loc egalitatea $A \cdot B = B \cdot A$.

c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G aparține mulțimii G.

R. a) pentru $a = 1$ şi $b = 0$, $a^2 - 3b^2 = 1$ şi $I_2 \in G$, iar pentru $a = b = 0$, $a^2 - 3b^2 = 0 =1$ şi $O_2 \notin G$.

b) $A,B \in G \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 3b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 3b_2 & a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 3b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 3b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + 3b_1 b_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ 3\left(a_2 b_1 + a_1 b_2\right) & a_1 a_2 + 3b_1 b_2 \end{pmatrix} \text{ şi}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 3b_2 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 3b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + 3b_1 b_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ 3\left(a_2 b_1 + a_1 b_2\right) & a_1 a_2 + 3b_1 b_2 \end{pmatrix}, \text{ atunci } A \cdot B = B \cdot A.$$

c) Orice matrice din G este inversabilă deoarece determinantul matricei este $a^2 - 3b^2 = 1 \neq 0$ şi inversa matricei:

$${}^t A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix},\ A_{11} = \left(-1\right)^{1+1} a = a,\ A_{12} = \left(-1\right)^{1+2} b = -b,$$

$A_{21} = \left(-1\right)^{2+1} 3b = -3b,\ A_{22} = \left(-1\right)^{2+2} a = a$ şi $A^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ -3b & a \end{pmatrix} = A^{-1}$ deoarece determinantul lui A este 1 şi $A^{-1} \in G$ deoarece $a^2 - 3b^2 = 1$.

17. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, unde $a,b \in \mathbf{Z}$. Se notează $A^2 = A \cdot A$.

a) Să se calculeze A^2 .
b) Să se verifice că $A^2 = aI_2 + bA$.
c) Ştiind că $X \in M_2(\mathbf{R})$ şi $AX = XA$, să se arate că există $m,n\in\mathbf{Z}$ astfel încât $X = mI_2 + nA$.

R. a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a & 0+b \\ ab & a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ab & a+b^2 \end{pmatrix}$.

b) $aI_2 + bA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ ab & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ab & a+b^2 \end{pmatrix} = A^2$.

c) $X \in M_2(\mathbf{R}) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, x,y,z,t \in \mathbf{R},\ AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & y \\ ax+bz & ay+bt \end{pmatrix}$ şi

$XA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ya & x+yb \\ ta & z+tb \end{pmatrix}$. Se obţine

$$\begin{cases} z = x \\ y = x + yb \\ ax + bz = ta \Rightarrow ax + aby = ta \,|\, : a \Rightarrow x + by = t \\ ay \cancel{+bt} = z \cancel{+tb} \Rightarrow ay = z \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ ay & x+by \end{pmatrix} = xI_2 + yA, \text{ atunci}$$

$m=x$ şi $n = y$.

18. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2 , unde $A^2=A \cdot A$.
b) Să se verifice că $AB-2B=O_2$.
c) Să se arate că dacă $X \in M_2(\mathbf{R})$ şi $A\cdot X\cdot B=O_2$, atunci suma elementelor matricei X este egală cu zero.

R. a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ şi $AB - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

c) $X \in M_2(\mathbf{R}) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ şi $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix}$, atunci

$AXB = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+t & -x-y-z-t \\ x+y+z+t & -x-y-z-t \end{pmatrix} = (x+y+z+t)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (x+y+z+t)\cdot B=O_2 \Rightarrow x+y+z+t = 0$.

19. Se consideră mulţimea $M=\{aI_2+bV|\ a,b\in\mathbf{R}\}$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $I_2 \in M$.
b) Să se arate că dacă $A\in M$ şi A este matrice inversabilă, atunci $a \neq 0$.
c) Ştiind că $A,B\in M$, să se arate că $AB\in M$.
R. a) Pentru a =1 şi b =0 $\Rightarrow I_2 \in M$.

b) $A\in M \Rightarrow A = aI_2+bV = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ b & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ -b & a+b \end{pmatrix}$. Matricea A este inversabilă dacă determinantul matricei este nenul,

$\det(A) = \begin{vmatrix} a+b & -b \\ b & a-b \end{vmatrix} = a^2 - b^2 + b^2 = a^2 \Rightarrow a^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0.$

c) $A,B\in M \Rightarrow A = aI_2+bV$, cu $a,b\in\mathbf{R}$ şi $B = cI_2+dV$, cu $c,d\in\mathbf{R}$, atunci

$AB = (aI_2 + bV)\cdot(cI_2 + dV) = acI_2 + adV + bcV + bdV^2 = acI_2 + (ad+bc)V \in M$

deoarece ac şi $ad+bc \in\mathbf{R}$.

$V^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

20. În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ notăm cu A^t transpusa matricei A.

a) Să se calculeze $I_2 + (I_2)^t$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că pentru orice $A \in M_2(\mathbf{R})$ şi $m \in\mathbf{R}$ are loc relația $(mA)^t = mA^t$.

c) Să se determine matricele $A \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $A + A^t = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

R. a) $I_2 + (I_2)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $A \in M_2(\mathbf{R}) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a,b,c,d \in \mathbf{R}$ şi $mA = \begin{pmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{pmatrix} \Rightarrow (mA)^t = \begin{pmatrix} ma & mc \\ mb & md \end{pmatrix}$,

iar $mA^t = m\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma & mc \\ mb & md \end{pmatrix}, \Rightarrow (mA)^t = mA^t$.

c) $A \in M_2(\mathbf{R}) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a,b,c,d \in \mathbf{R}$ şi $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow A + A^t = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$.

Se obține: $2a=0$, $b+c=0$, $2d=0$, atunci $a=0$, $c=-b$, $d=0$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbf{R}$.

21. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbf{R} \right\}$ şi matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $A(1,1)$.

b) Să se demonstreze că dacă $A,B \in$ M, atunci $A+B \in$ M .

c) Să se arate că $\det(I_2 - A(0,b)) \neq 0$, oricare ar fi $b \in \mathbf{R}$.

R. a) $A(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A(1,1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 1\cdot(-1) = 1$.

b) $A,B\in M \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}, a,b\in\mathbf{R}$ şi $B=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c-d \end{pmatrix}, c,d\in\mathbf{R}\Rightarrow$

$A+B=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c-(b+d) \end{pmatrix}\in M$ deoarece $a+c, b+d\in\mathbf{R}$.

c) $I_2-A(0,b)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -b \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ şi

$\det\left(I_2-A(0,b)\right)=\begin{vmatrix} 1 & -b \\ b & 1-b \end{vmatrix}=(1-b)+b^2=b^2-b+1=b^2-b+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\neq 0$.

22. Se consideră mulţimea $M=\left\{\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbf{Z}\right\}$.

a) Dacă $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze AB.

b) Să se demonstreze că pentru oricare $X,Y\in M$, rezultă că $XY\in M$.

c) Să se demonstreze că, dacă $U\in M$ şi $VU=UV$, pentru orice $V\in M$, atunci există $p\in\mathbf{Z}$ astfel încât $U=\begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

R. a) $AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 3+2\cdot 1 & 1\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 1 \\ 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 2+3\cdot 1 \\ 0 & 0 & 1\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $X,Y\in M\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a,b,c\in\mathbf{Z}, Y=\begin{pmatrix} 1 & e & f \\ 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e,f,g\in\mathbf{Z}\Rightarrow$

$X\cdot Y=\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & e & f \\ 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & e+a & f+ag+c \\ 0 & 1 & g+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in M$ pentru că $e+a$, $f+ag+c$, $b+g\in\mathbf{Z}$.

c) $U\in M\Rightarrow U=\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V\in M\Rightarrow V=\begin{pmatrix} 1 & e & f \\ 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$

$V\cdot U=\begin{pmatrix} 1 & e & f \\ 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a+e & c+eb+f \\ 0 & 1 & b+g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

şi $U \cdot V = \begin{pmatrix} 1 & e+a & f+ag+c \\ 0 & 1 & b+g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow eb = ag,\ \forall e,g \in \mathbf{Z} \Rightarrow a=b=0$ şi $c=p\in\mathbf{Z}$.

23. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbf{R}^* \right\}$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Se notează cu X^t transpusa matricei X.

a) Să se calculeze $A^t \cdot A$.

b) Să se arate că, pentru orice matrice $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ din M, are loc egalitatea $\det\left(X \cdot X^t\right) = \left(ad - bc\right)^2$

c) Să se arate că, pentru orice matrice $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M$ cu $\det(X \cdot X^t)=0$, are loc relația $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

R. a) $A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 3+12 \\ 3+12 & 9+36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 45 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $X \cdot X^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\det\left(X \cdot X^t\right) = \left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right) - \left(ab+cd\right)^2 = \cancel{a^2b^2} + a^2d^2 + c^2b^2 \cancel{+c^2d^2} -$

$\cancel{-a^2b^2} - 2abcd \cancel{-c^2d^2} = a^2d^2 - 2abcd + c^2b^2 = \left(ad-bc\right)^2$.

c) Din punctul **b)** $\det\left(X \cdot X^t\right) = \left(ad-bc\right)^2$ şi $\det\left(X \cdot X^t\right) = 0$ se obține $\left(ad-bc\right)^2 = 0 \Rightarrow ad - bc = 0 \Rightarrow ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

24. Fie funcția $f: M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$ definită prin $f(A) = A + A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

a) Să se calculeze $f(I_2)$.

b) Să se demonstreze că $(A+B)^t = A^t + B^t$, oricare ar fi $A,B \in M_2(\mathbf{R})$.

c) Să se determine matricele $A \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $\det A = 1$ şi $f(A) = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

R. a) $f\left(I_2\right) = I_2 + {}^t I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I_2$.

b) $\left(A+B\right)^t = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right)^t = \left(\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{pmatrix}$,

$$A^t + B^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{pmatrix} = \left(A+B\right)^t.$$

c) $A \in M_2(\mathbf{R}) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A\right) = ad - bc = 1$ şi

$$f\left(A\right) = A + A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ b + c = 0 \\ 2d = 0 \Rightarrow d = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ -bc = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sau } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$