Rolul derivatei întâi

Definiție: **Punctele critice** ale unei funcții derivabile sunt rădăcinile (zerourile) derivatei întâi.

Definiție: Fie $f:I\to\mathbf{R}$, cu $I\subseteq\mathbf{R}$, interval.

1. Spunem că punctul $x_0 \in I$ este un **punct de maxim local** strict pentru f, dacă există o vecinătate U a lui x_0, astfel încât: $f(x) < f(x_0),\ \forall x \in U \cap \left(I \setminus \{x_0\}\right)$.

2. Spunem că punctul $x_0 \in I$ este un **punct de minim local** strict pentru f, dacă există o vecinătate U a lui x_0, astfel încât: $f(x) > f(x_0),\ \forall x \in U \cap \left(I \setminus \{x_0\}\right)$.

Teorema lui Fermat:

Fie $f:I\to\mathbf{R}$ derivabilă pe I. În orice punct extrem local din interiorul lui I, f' este nulă.

Observații: ▪ Reciproca teoremei lui Fermat nu este adevarată: dacă $f'(x_0)=0$, nu rezultă că x_0 este punct de extrem.

▪O funcție poate avea puncte de extrem în care nu este derivabilă.

Teorema lui Rolle:

Dacă funcția continuă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este derivabilă pe (a,b) şi $f(a) = f(b)$ atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Teorema lui Lagrange:

Dacă funcția continuă $f:[a,b]\to\mathrm{R}$ este derivabilă pe (a,b), atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Corolar: Fie $f:I\to\mathbf{R}$, $I\subseteq\mathbf{R}$ interval şi $x_0\in I$. Dacă:

1. f este continuă pe I ;
2. f este derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ şi există $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)\in\mathbf{R}$,

atunci există derivata $f'(x_0)$ şi $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

Consecințe ale teoremei lui Lagrange:

1. Fie $f:\mathrm{E}\to\mathbf{R}$ o funcție derivabilă şi $I\subseteq\mathbf{R}$ un interval.
- Dacă $\forall x\in I$, avem $f'(x)>0$, atunci funcția este strict crescătoare pe I.
- Dacă $\forall x\in I$, avem $f'(x)<0$, atunci funcția este strict descrescătoare pe I.

2. Fie $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ o funcți derivabilă şi $c\in(a,b)$. Dacă f' se anulează în c schimbându-şi semnul, atunci c este un punct de extrem local pentru f.

Observație: Cu ajutorul primei derivate se stabilesc intervalele de monotonie ale unei funcții derivabile si se determina punctele de extrem local.

Utilizarea primei derivate (etape): Fie $f:I\to\mathrm{R}$, I interval, f derivabilă pe I.

▪Se calculează $f'(x), x\in I$; ▪Se rezolvă ecuația $f'(x)=0$.

▪Se stabileşte semnul derivatei f'.

▪Se determină valorile funcției în punctele critice (zerourile derivatei) şi eventual limitele funcției la capetele intervalului.

x	interval I
$f'(x)$	rădăcini, semn
$f(x)$	valori, monotonie, limite (eventual)

Observații:▪Dacă funcția este derivabilă pe o reuniune de intervale, se alcătuieşte acest tabel pentru fiecare interval.

▪ Alte utilizari ale tabelului de monotonie: determinarea mulțimii valorilor funcției (Imf);

▪ Determinarea semnului funcției; existența şi localizarea rădăcinilor; demonstrarea unor inegalități.

Probleme rezolvate

1. Se consideră funcţia $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ derivabilă pe intervalul deschis (a,b). Precizaţi valoarea de adevăr a propoziţiei: „Dacă $c\in(a,b)$ şi $f'(c)$, atunci c este punct de extrem al funcţiei f.“ Justificaţi răspunsul.
Rezolvare: Propoziţia este falsă. Contraexemplu: funcţia constantă.

2. Se consideră funcţia $f:(-2,3)\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ **.**

a) Să se stabilească domeniul de derivabilitate şi să se calculeze derivata funcţiei.
b) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei f.

Rezolvare:

a) Din $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ pentru orice $x\neq0$ se pune problema derivabilităţii funcţiei în $x_0=0$. Calculăm derivatele laterale:

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{(x-1)\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}=-\frac{1}{0-}=+\infty \text{ şi}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{(x-1)\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}=-\frac{1}{0+}=-\infty.$$

Limitele laterale sunt infinite şi atunci f nu este derivabilă în origine. Obţinem $D'=(-2,3)\setminus\{0\}$.

$$f'(x)=(x-1)'\sqrt[3]{x^2}+(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{3x+2x-2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

b) Tabelul de variaţie al funcţiei. $f'(x)=0\Rightarrow 5x-2=0\Rightarrow x=\frac{2}{5}$.

x	-2		0		$\frac{2}{5}$		3
$f'(x)$		$+ + + + + + + + +$	$^{+\infty}\vert_{-\infty}$	$- - - - - -$	0	$+ + + + + + + + + + +$	
$f(x)$	$-3\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$	$\nearrow$	$2\sqrt[3]{9}$

$f(-2)=(-2-1)\sqrt[3]{4}=-3\sqrt[3]{4}$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}-1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}}=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$,

$f(3)=(3-1)\sqrt[3]{9}=2\sqrt[3]{9}$.

Din tabelul de variaţie avem: $x=-2$ punct de minim, $x=0$ punct de maxim, $x=\frac{2}{5}$ punct de minim şi $x=3$ punct de maxim.

3. Să se arate că dacă m,M sunt valori extreme ale funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+ax+b$ $(a,b\in\mathbf{R},a<0)$ atunci $m\cdot M=b^2+\frac{4}{27}a^2$.

Rezolvare: Punctele de extrem se determină din punctele critice ale funcției.

$f'(x)=3x^2+a$. Din $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+a=0 \Rightarrow x^2=-\frac{a}{3} \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$. Atunci

$$m=f\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)=-\sqrt{-\frac{a^3}{27}}-a\sqrt{-\frac{a}{3}}+b=-\left|\frac{a}{3}\right|\sqrt{-\frac{a}{3}}-a\sqrt{-\frac{a}{3}}+b=\frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}-a\sqrt{-\frac{a}{3}}+b$$

şi $M=f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)=\sqrt{-\frac{a^3}{27}}+a\sqrt{-\frac{a}{3}}+b=\left|\frac{a}{3}\right|\sqrt{-\frac{a}{3}}+a\sqrt{-\frac{a}{3}}+b=-\frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}+a\sqrt{-\frac{a}{3}}+b$.

$$m\cdot M=\left(\frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}-a\sqrt{-\frac{a}{3}}+b\right)\left(-\frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}+a\sqrt{-\frac{a}{3}}+b\right)=$$

$$=-\frac{a^2}{9}\left|\frac{a}{3}\right|+\frac{a^2}{3}\left|\frac{a}{3}\right|+\cancel{\frac{ab}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}}+\frac{a^3}{3}\left|\frac{a}{3}\right|-a^2\left|\frac{a}{3}\right|\cancel{-ab\sqrt{-\frac{a}{3}}}\cancel{-\frac{ab}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}}\cancel{+ab\sqrt{-\frac{a}{3}}}+b^2=$$

$$=\frac{a^3}{27}-{}^{3)}\frac{a^3}{9}-{}^{3)}\frac{a^3}{9}+{}^{9)}\frac{a^3}{3}+b^2=b^2+\frac{1-3-3+9}{27}a^3=b^2+\frac{4}{27}a^3.$$

4. Fie $a,b,c\in(0,+\infty)$ cu proprietatea că $a^x+b^x+c^x\geq 3, \forall x\in\mathbf{R}$. Să se arate că $a\cdot b\cdot c=1$.

Rezolvare: Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=a^x+b^x+c^x$ are în x=0 valoarea minimă $f(0)=3$, adică $x_0=0$ punct de minim. Conform teoremei lui Fermat avem $f'(0)=0$. Calculăm derivata:

$f'(x)=a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c \Rightarrow f'(0)=\ln a+\ln b+\ln c=\ln(abc)$. Se obține $\ln(abc)=0\Rightarrow abc=1$, ceea ce trebuia demonstrat.

Generalizare: $a_1^x+a_2^x+...+a_n^x\geq n\Rightarrow a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n=1$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

5. Fie $a,b\in\mathbf{R}_+^*$ cu proprietatea că $\frac{x+a}{x^2+b}\leq\frac{1+a}{1+b}, \forall x\in\mathbf{R}$. Arătați că $b=2a+1$.

Rezolvare: Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x+a}{x^2+b}$ are în x_0=1 punct de maxim $\left(f(x)\leq f(1)=\frac{1+a}{1+b}\right)$, atunci $f'(1)=0$. Calculăm $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{x^2+b-(x+a)\cdot 2x}{(x^2+b)^2}=\frac{-x^2-2ax+b}{(x^2+b)^2},$$

$$f'(1)=\frac{-1-2a+b}{(1+b)^2}\Rightarrow\frac{-1-2a+b}{(1+b)^2}=0\Rightarrow 1-2a+b=0\Rightarrow b=2a+1.$$

6. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^x-1, x<0\\ x^2+x, x\geq 0\end{cases}$. Să se determine domeniul de derivabilitate şi derivata funcției pe acest domeniu.

Rezolvare: Determinăm derivabilitatea funcției în punctul $x_0=0$ utilizând corolarul teoremei lui Lagrange.
Continuitatea în $x_0=0$.

$$\left.\begin{aligned} & l_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(e^x-1\right)=e^0-1=0 \\ & l_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^2+x\right)=0^2+0=0=f(0) \end{aligned}\right\}\Rightarrow f \text{ este continuă în } x_0=0.$$

Funcția f este derivabilă pe $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ și $f'(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ 2x+1, & x>0 \end{cases}$.

$$\left.\begin{aligned} & f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^x=1 \\ & f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(2x+1)=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(0)=1 \text{ și atunci } f'(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ 2x+1, & x\ge 0 \end{cases}.$$

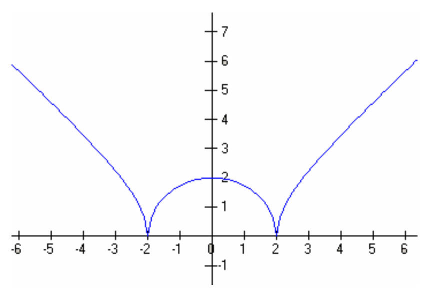
7. Să se studieze derivabilitatea funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{\left|x^2-4\right|}$.

Rezolvare: Explicităm funcția: $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-4}, & x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty) \\ \sqrt{4-x^2}, & x\in(-2,2) \end{cases}$.

Probleme derivabilității în punctele -2 și 2. Continuitatea în punctul $x_0=-2$

$$\left.\begin{aligned} & l_s(-2)=\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\sqrt{x^2-4}=0=f(-2) \\ & l_d(-2)=\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\sqrt{4-x^2}=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow f \text{ este continuă în } x_0=-2. \text{ Analog}$$

funcția este continuă în $x_0=2$.
Calculăm derivata funcției pe $\mathbf{R}\setminus\{\pm 2\}$,



$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}, & x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty) \\ -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}, & x\in(-2,2) \end{cases}.$$

$$\left.\begin{aligned} & \lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{-2}{0+}=-\infty \\ & \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{2}{0+}=+\infty \end{aligned}\right\}\Rightarrow f \text{ nu este derivabilă în } x_0=-2. \text{ Analog funcția}$$

nu este derivabilă nici în punctul $x_0=2$. Se obține $D'=\mathbf{R}\setminus\{\pm 2\}$

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}, x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\\ -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}, x\in(-2,2)\end{cases}$. Punctele $x_0=-2$ şi $x_0=2$ sunt puncte de întoarcere (puncte de minim).

8. Să se arate că $|\sin x_1-\sin x_2|\le|x_1-x_2|, \forall x\in\mathbf{R}$.

Rezolvare: Fie $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ fixate şi funcţia $\sin:[x_1,x_2]\to\mathbf{R}$ continuă pe $[x_1,x_2]$ şi derivabilă pe (x_1,x_2). Conform teoremei lui Lagrange$\Rightarrow\exists c\in(x_1,x_2)$ astfel încât

$\dfrac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}=\sin' c\Rightarrow\sin x_2-\sin x_1=(x_2-x_1)\cdot\cos c\Rightarrow$

$\Rightarrow|\sin x_2-\sin x_1|=|x_2-x_1|\cdot|\cos c|$. Deoarece $|\cos c|\le1$ se obţine:

$|\sin x_1-\sin x_2|=|x_1-x_2|$.

9. Să se demonstreze inegalitatea: $\dfrac{1}{n+1}<\ln\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{1}{n},\forall n\in\mathbf{N}^*$.

Rezolvare: Considerăm funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\ln x$ continuă pe $[n, n+1]$ şi derivabilă pe $(n, n+1)$. Aplicăm teorema lui Lagrange:

$\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{n+1-n}=(\ln c)' \quad ,c\in(n,n+1)\Rightarrow\ln\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{c}$. Cum $c\in(n, n+1)\Rightarrow$

$n<c<n+1\Rightarrow\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{n}\Rightarrow\dfrac{1}{n+1}<\ln\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{1}{n},\forall n\in\mathbf{N}^*$.

10. Să se demonstreze inegalitatea: $\dfrac{b-a}{\sin^2 b}<\operatorname{ctg}a-\operatorname{ctg}b<\dfrac{b-a}{\sin^2 a}, 0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$.

Rezolvare: Fie funcţia $\operatorname{ctg}:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}$ continuă pe $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ şi derivabilă pe $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, aplicăm teorema lui Lagrange: $\dfrac{\operatorname{ctg}b-\operatorname{ctg}a}{b-a}=(\operatorname{ctg}c)', \ a<c<b\Rightarrow$

$\dfrac{\operatorname{ctg}b-\operatorname{ctg}a}{b-a}=-\dfrac{1}{\sin^2 c}\Big|\cdot(-1)\Rightarrow\dfrac{\operatorname{ctg}a-\operatorname{ctg}b}{b-a}=\dfrac{1}{\sin^2 c}$. Din $0<a<c<b<\dfrac{\pi}{2}$ şi funcţia

$\sin:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}$ crescătoare se obţine $\sin a<\sin c<\sin b\big|(\ )^2\Rightarrow$

$\Rightarrow\sin^2 a<\sin^2 c<\sin^2 b\Rightarrow\dfrac{1}{\sin^2 b}<\dfrac{1}{\sin^2 c}<\dfrac{1}{\sin^2 a}$ şi atunci avem

$\dfrac{1}{\sin^2 b}<\dfrac{\operatorname{ctg}a-\operatorname{ctg}b}{b-a}<\dfrac{1}{\sin^2 a}\Big|\cdot\underbrace{(b-a)}_{>0}\Rightarrow\dfrac{b-a}{\sin^2 b}<\operatorname{ctg}a-\operatorname{ctg}b<\dfrac{b-a}{\sin^2 a}, 0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$.

11. Să se demonstreze inegalitatea: $(ae)^{b-a} < \dfrac{b^b}{a^a} < (be)^{b-1}$, $\dfrac{1}{e} < a < b$.

Rezolvare: Funcția $f:\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x\ln x$ este continuă pe [a,b] şi derivabilă pe (a,b), $[a,b] \subset \left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$. Aplicăm teorema lui Lagrange:

$\dfrac{b\ln b - a\ln a}{b-a} = f'(c)$, $c \in (a,b)$. Calculăm derivata funcției f:

$f'(x) = x'\ln x + x\cdot(\ln x)' = \ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + 1 \Rightarrow \dfrac{b\ln b - a\ln a}{b-a} = \ln c + 1$. Din

$\left.\begin{array}{l} a < c < b \\ \ln x \text{ funcție crescătoare} \end{array}\right\} \Rightarrow \ln a < \ln c < \ln b \ |+1 \Rightarrow \ln a + 1 < \ln c + 1 < \ln b + 1 \Rightarrow$

$\ln(ae) < \ln c + 1 < \ln(be)$. Se obține din cele două relații:

$\ln(ae) < \dfrac{b\ln b - a\ln a}{b-a} < \ln(be) \Big| \cdot (b-a) \Rightarrow$

$(b-a)\ln(ae) < \ln b^b - \ln a^a < (b-a)\ln(be) \Rightarrow \ln(ae)^{b-a} < \ln\dfrac{b^b}{a^a} < \ln(be)^{b-a}$. Din bijectivitatea funcției logaritmice obținem: $(ae)^{b-a} < \dfrac{b^b}{a^a} < (be)^{b-1}$, $\dfrac{1}{e} < a < b$.

12. Să se rezolve ecuația: $4^x + 5^x = 6^x + 3^x$.

Rezolvare: Putem scrie ecuația echivalentă: $6^x - 5^x = 4^x - 3^x$. Considerăm funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbf{R}$, $f(t) = t^x$ care verifică ipotezele teoremei lui Lagrange. Aplicăm teorema pe intervalele [3;4] şi [5;6]:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{4^x - 3^x}{4-3} = x\cdot(c_x)^{x-1}, \quad c_x \in (3;4) \\ \dfrac{6^x - 5^x}{6-5} = x\cdot(d_x)^{x-1}, \quad d_x \in (5;6) \end{array}\right\} \Rightarrow x\cdot(c_x)^{x-1} = x\cdot(d_x)^{x-1}$$ care are o soluție $x_1 = 0$.

Pentru $x \neq 0$, prin simplificare cu x obținem $(c_x)^{x-1} = (d_x)^{x-1} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$.

$S = \{0;1\}$.

Digitally signed by
Virgil-Mihail Zaharia