Admitere matematică, iulie 1986

1. Să se arate că, pentru orice număr natural $k \geq 2$, avem:

$$0 \leq \ln\left(\ln\left(k+1\right)\right) - \ln\left(\ln k\right) \leq \frac{1}{k \cdot \ln k} \tag{1.1}$$

Soluție: Considerăm funcția $f:\left(1,+\infty\right) \to \mathbf{R}$, $f\left(x\right) = \ln\left(\ln x\right)$. Funcția este corect definită deoarece pentru $x > 1$ avem $\ln x > 0$ şi deci are sens $\ln(\ln x)$. Funcția f este compunerea a două funcții strict crescătoare (restricții ale funcției ln), deci este strict crescătoare pe domeniul ei de definiție. Aşadar, pentru orice $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, avem:

$$f\left(k+1\right) - f\left(k\right) = \ln\left(\ln\left(k+1\right)\right) - \ln\left(\ln k\right) > 0.$$

Funcția f este derivabilă pe domeniul de definiție, fiind o compunere de două funcții derivabile. Aşadar, pentru orice $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$ putem aplica teorema de medie a lui Lagrange restricției funcției f la intervalul $[k, k+1]$.

Pentru orice $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, există $\xi_k \in (k, k+1)$ astfel ca $f(k+1) - f(k) = f'(\xi_k)(k+1-k) = f'(\xi_k)$, adică

$$\ln\left(\ln\left(k+1\right)\right) - \ln\left(\ln k\right) = f'\left(\xi_k\right) = \frac{1}{\xi_k \cdot \ln \xi_k} \tag{1.2}$$

Se observă că $f'\left(x\right) = \dfrac{1}{x \ln x}$ pentru orice $x \in (1,+\infty)$ şi că f': $(1,+\infty) \to \mathbf{R}$ este strict descrescătoare. Deoarece $\xi_k \in (k, k+1)$ obținem $f'(\xi_k) < f'(k)$, deci

$$f'\left(\xi_k\right) < \frac{1}{k \cdot \ln k} \tag{1.3}$$

Din (1.2) şi (1.3) obținem inegalitatea căutată: $0 \leq \ln\left(\ln\left(k+1\right)\right) - \ln\left(\ln k\right) \leq \dfrac{1}{k \cdot \ln k}$.

2. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2 \cdot \ln 2} + \frac{1}{3 \cdot \ln 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot \ln n}\right) \tag{2.1}$$

Soluție: Folosim inegalitatea (1.1)

$$\frac{1}{k \cdot \ln k} > \ln\left(\ln\left(k+1\right)\right) - \ln\left(\ln k\right),\ \forall k \in \mathbf{N},\ k \geq 2 \tag{2.2}$$

Însumăm inegalitățile (2.2) pentru $k \in \{2,3,\ldots,n\}$ şi reducem termenii din membrul drept se obține:

$$x_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \cdot \ln k} > \sum_{k=2}^{n}\left(\ln\left(\ln\left(k+1\right)\right) - \ln\left(\ln k\right)\right) = \ln\left(\ln\left(n+1\right)\right) - \ln\left(\ln 2\right) \tag{2.3}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(n+1\right) = +\infty$ obținem şi $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\ln\left(n+1\right)\right) = +\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(\ln\left(n+1\right)\right) - \ln\left(\ln 2\right)\right) = +\infty$, deci $(x_n)_{n\geq 2}$ fiind minorat de şirul divergent la $+\infty$ $\left(\ln\left(\ln\left(n+1\right)\right) - \ln\left(\ln 2\right)\right)_{n\geq 2}$ este divergent la $+\infty$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot\ln 2}+\frac{1}{3\cdot\ln 3}+...+\frac{1}{n\cdot\ln n}\right)=+\infty .$$

3. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\left(1+tg^2x+tg^2(2x)+...+tg^2(nx)\right)^{\frac{1}{n^3x^2}}\right) \tag{3.1}$$

Soluție: Pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$ fie $f_n:\mathbf{R}-\{0\}\to\mathbf{R}$, dată de $f_n(x)=\left(1+\mathrm{tg}^2x+...+\mathrm{tg}^2(nx)\right)^{\frac{1}{n^3x^2}}$ pentru orice $x\in\mathbf{R}-\{0\}$, funcții derivabile pe domeniul de definiție.

Studiem mai întâi existența limitei $\lim\limits_{x\to 0}f_n(x)$ care este o nedeterminere de forma 1^∞. Imaginea funcției $f_n:\mathbf{R}-\{0\}\to\mathbf{R}$ este $(0,+\infty)$ şi are sens să considerăm funcțiile

$$g_n:(0,\infty)\to\mathbf{R},\ g_n(x)=\ln f_n(x). \tag{3.2}$$

Limita $\lim\limits_{x\to 0}g_n(x)$ este o nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$. Avem $g_n(x)=\dfrac{\ln\left(1+\mathrm{tg}^2x+...+\mathrm{tg}^2(nx)\right)}{n^2x^2}$ pentru orice fie $x\in\mathbf{R}-\{0\}$, $n\in\mathbf{N}^*$. Pentru calcularea limitei $\lim\limits_{x\to 0}g_n(x)$ suntem în condițiile teoremei lui L'Hospital în punctul $x=0$. Avem

$$\left[\ln\left(1+\mathrm{tg}^2x+...+\mathrm{tg}^2(nx)\right)\right]'=\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2x+...+\mathrm{tg}^2(nx)}\cdot\left(\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2x}+2\cdot\frac{\mathrm{tg}2x}{\cos^2 2x}+...+n\cdot\frac{\mathrm{tg}nx}{\cos^2 nx}\right)=$$

$$=\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2x+...+\mathrm{tg}^2(nx)}\cdot\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{\mathrm{tg}(kx)}{\cos^2(kx)}.$$ Considerăm raportul:

$$\frac{\left[\ln\left(1+tg^2x+...+tg^2(nx)\right)\right]'}{\left(n^3x^2\right)'}=\frac{1}{\left(1+tg^2x+...+tg^2(nx)\right)n^3x}\cdot\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{tg(kx)}{\cos^2(kx)}=$$

$$=\frac{1}{\left(1+tg^2x+...+tg^2(nx)\right)n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{tg(kx)}{kx}\cdot\frac{k^2}{\cos^2(kx)}.$$ Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(kx)}{kx}=1$ pentru orice $k\in\mathbf{N}^*$, obținem că există $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{tg(kx)}{kx}\cdot\dfrac{k^2}{\cos^2(kx)}=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2x+...+tg^2(nx)\right)=1$ se obține $\lim\limits_{x\to 0}g_n(x)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{5n^3}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\left(1+tg^2x+tg^2(2x)+...+tg^2(nx)\right)^{\frac{1}{n^3x^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e} \tag{3.3}$$

4. Să se reprezinte grafic funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, dată prin:

$$f(x)=(x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \tag{4.1}$$

Soluție: Funcția este bine definită deoarece $0 \le \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \le 1$ pentru orice $x \in$ **R.**

Funcția este continuă pe **R** şi derivabilă pe **R**$-\{0\}$. Observăm că $f(x)=0$ implică $x \in \{0;1\}$ şi graficul lui f taie axa Oy în punctul $y=0$.

Determinăm asimptotele funcției: $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, nu are asimptote orizontale. Asimptote oblice $y = mx + n$:

$\lim_{|x|\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = 1 \Rightarrow \lim_{|x|\to\infty}\left(\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ şi atunci

$m = \lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right) = 1\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Calculăm

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left((x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} - \frac{\pi}{2}x\right) =$$

$= \lim_{x\to\infty} x\left(\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} - \frac{\pi}{2}\right) - \lim_{x\to\infty}\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$. Observăm că

$\lim_{x\to\infty}\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = \arcsin\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Pentru a calcula

$\lim_{x\to\infty} x\left(\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} - \frac{\pi}{2}\right)$ facem substituția $x = \frac{1}{v}$ şi obținem

$x\left(\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{v}\left(\arcsin\sqrt{\frac{1}{1+v^2}} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\arcsin\sqrt{\frac{1}{1+v^2}} - \frac{\pi}{2}}{v} = \frac{g(v)}{h(v)}$. Trecând la limită suntem în cazul $\frac{0}{0}$ cu condițiile de aplicabilitatea a teoremei lui L'Hospital în $v\to 0$, $v>0$. Atunci: $g'(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+v^2}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+v^2}}}\cdot\left(-\frac{2v}{\left(1+v^2\right)^2}\right) = -\frac{1}{\left(1+v^2\right)}$ pentru orice $v \in (0,+\infty)$,

iar $h'(v)=1$. Deoarece există $\lim_{\substack{v\to 0\\ v>0}}\frac{g(v)}{h(v)} = -1$ şi deci există $\lim_{x\to\infty} x\left(\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ şi

atunci $n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left((x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} - \frac{\pi}{2}x\right) = -1 - \frac{\pi}{2}$. Aşadar dreapta

$y = \frac{\pi}{2}x - 1 - \frac{\pi}{2}$ este asimptotă la $+\infty$ la graficul lui f.

Asimptota la $-\infty$.

Pentru calculul $n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(x-1\right)\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}-\dfrac{\pi}{2}x\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}-\dfrac{\pi}{2}\right)-\lim\limits_{x\to-\infty}\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$ se face aceeaşi substituţie $x=\dfrac{1}{v}$ ca şi la calculul limitei la $+\infty$ având funcţiile g şi h definite pentru valori negative ale lui v.

$$g'(v)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+v^2}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+v^2}}}\cdot\left(-\frac{2v}{\left(1+v^2\right)^2}\right)=-\frac{v}{\sqrt{v^2}}\cdot\frac{1}{1+v^2}==-\frac{v}{|v|}\cdot\frac{1}{1+v^2}=\frac{1}{1+v^2}$$ pentru

orice $v<0$ şi $h'(v)=1$. Deoarece există $\lim\limits_{\substack{v\to0\\v<0}}\dfrac{g'(v)}{h'(v)}=\lim\limits_{\substack{v\to0\\v<0}}\dfrac{1}{1+v^2}=1$ obţinem că există

$$\lim_{\substack{v\to0\\v<0}}\frac{\arcsin\sqrt{\frac{1}{1+v^2}}-\frac{\pi}{2}}{v}=1$$ şi atunci

$n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(x-1\right)\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}-\dfrac{\pi}{2}x\right)=1-\dfrac{\pi}{2}$. Dreapta $y=\dfrac{\pi}{2}x+1-\dfrac{\pi}{2}$ este asimptotă la $-\infty$ la graficul funcţiei *f*.

Funcţia *f* este derivabilă pe $\mathbf{R}-\{0\}$ şi avem:

$$f'(x)=\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}+\left(x-1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}}\cdot\frac{2x\left(x^2+1\right)-x^2\cdot2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}+\left(x-1\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{1}{x^2+1}=\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}+\frac{x-1}{x^2+1}\cdot\frac{x}{|x|}$$ pentru orice $x\in\mathbf{R}-\{0\}$.

Pentru $x<0$ avem $\dfrac{x-1}{x^2+1}\cdot\dfrac{x}{|x|}=-\dfrac{x-1}{x^2+1}>0$ şi cum $\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}>0$ obţinem că $f'(x)>0$ pe $(-\infty,0)$.

Pentru $x\in[1,+\infty)$ avem $\dfrac{x-1}{x^2+1}\cdot\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{x-1}{x^2+1}\geq0$ şi deci $f'(x)\geq0$.

Funcţia f' este continuă pe $\mathbf{R}-\{0\}$. Determinăm derivatele laterale în $x_0=0$.

$l_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left[\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}-\dfrac{x-1}{x^2+1}\right]=1$ şi

$l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left[\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}+\dfrac{x-1}{x^2+1}\right]=-1$. Deoarece *f* este continuă pe $\mathbf{R}$, *f* este derivabilă pe **R**−{0} deducem că există derivatele laterale în $x_0=0$ şi avem $f_s'(0)=1$ şi $f_d'(0)=-1$, iar funcția nu este derivabilă în origine.

Deoarece $f_d'(0)=-1<0$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)$ şi funcția f' este continuă pe **R**−{0} atunci are proprietatea lui Darboux pe intervalul (0,1) şi f' trebuie să se anuleze cel puțin o dată pe acest interval. Calculăm derivata a doua a lui f pe **R**−{0}:

$$f''(x)=\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{x\cdot\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}}\cdot\frac{2x}{x^2+1}+\frac{x}{|x|}\cdot\frac{x^2+1-(x-1)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{x}{|x|}\cdot\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{|x|}\cdot\frac{-x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{|x|}\cdot\frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$ pentru orice $x\in$ **R**−{0}.

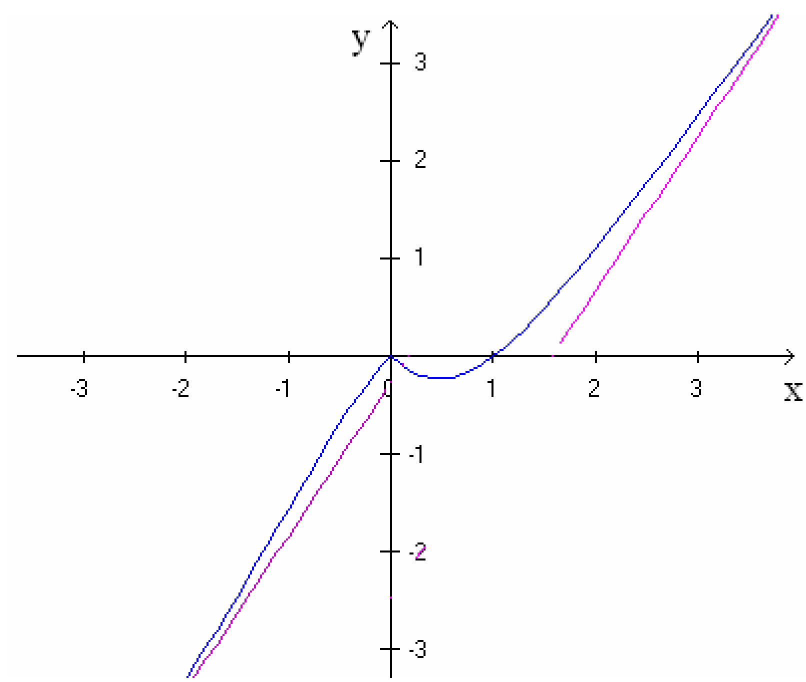
Pentru $x\in(0,+\infty)$, $f''(x)=\frac{2(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}>0$ şi deci $f''(x)>0$ pentru orice $x\in(0,1)$, aşadar f' este strict crescătoare pe acest interval. Prin urmare există un unic punct $x_0\in(0,1)$ astfel încât $f'(x_0)=0$ şi atunci $f'(x)<0$ pentru $x\in(0,x_0)$ şi $f'(x)>0$ pentru $x\in(x_0,+\infty)$.

Pentru $x<0$: $f''(x)=-\frac{2(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}$. Aşadar, pentru $x\in(-\infty,-1)$, $f''(x)>0$, pentru $x\in(-1,0)$, $f''(x)<0$ şi $f''(-1)=0$.

Tabloul de variație al funcției:

x	$-\infty$		-1		0		x_0		1		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + +	+ + + +	+ + + +	+ + + +	|	− − − − − −	0	+ + + + + +	+ + + + + +	+ + + + + +	+
$f(x)$	$y=\frac{\pi}{2}x+1-\frac{\pi}{2}$	↗		↗	0	↘	$f(x_0)$	↗	0	↗	$y=\frac{\pi}{2}x-1-\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	+ + + +	+ + +	0	− − − − −	|	+ + + + + +	+ + + + + +	+ + + + + +	+ + + + + +	+ + + + + +	+ + +

Graficul funcției:



5. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b\left((x-a)\cdot(b-x)\right)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$, dacă $a<b$.

Soluție: Vom calcula mai întâi

$$A_{m,n}=\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n\,dx=\int_a^b (x-a)^m\cdot\left(-\frac{1}{n+1}(b-x)^{n+1}\right)'dx=$$

$$=-\frac{1}{n+1}(x-a)^m(b-x)^{n+1}\Big|_a^b+\frac{m}{n+1}\int_a^b (x-a)^{m-1}(b-x)^{n+1}dx=\frac{m}{n+1}\int_a^b (x-a)^{m-1}(b-x)^{n+1}dx=$$

$$=\frac{m}{n+1}A_{m-1,n+1},\ m\in\mathbf{N}^*,\ n\in\mathbf{N}.$$

Integrala din enunțul problemei este $A_{n,n}$ şi o vom calcula folosind relația de recurență

$$A_{m,n}=\frac{m}{n+1}A_{m-1,n+1},\ \forall m,n\in\mathbf{N},\ m\geq 1. \tag{5.1}$$

Se obține:

$$A_{n,n}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n+2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n+n}\cdot A_{0,2n}. \tag{5.2}$$

Dar

$$A_{0,2n}=\int_a^b (b-x)^{2n}dx=-\frac{(b-x)^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_a^b=\frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}. \tag{5.3}$$

Aşadar din (5.2) şi (5.3) obținem că

$$A_{n,n}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n+2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2n}\cdot\frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\cdot(b-a)^{2n+1} \tag{5.4}$$

şi avem

$$\left(A_{n,n}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}}\cdot(b-a)^{\frac{2n+1}{n}} \tag{5.5}$$

Obsrvăm că

$$\sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}}=\sqrt[n]{\frac{1^2}{2\cdot 3}\cdot\frac{2^2}{4\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2}{2n(2n+1)}}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2k(2k+1)}} \tag{5.6}$$

Dacă notăm $x_k=\dfrac{k^2}{2k(2k+1)}$ pentru orice $k\in\mathbf{N}^*$ obținem

$\sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}}=\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{2k(2k+1)}}=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$. Ținând cont de teorema Cauchy-D'Alembert: „Dacă $(x_n)_n$ este un şir de numere pozitive nenule astfel încât există limita

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=l$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=l$", se obține că şirul $(x_n)_n$ este convergent la $\frac{1}{4}$ atunci şirul $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$ este convergent la $\frac{1}{4}$.

Aşadar există $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}}=\frac{1}{4}$ şi cum există şi $\lim\limits_{n\to\infty}(b-a)^{\frac{2n+1}{n}}=(b-a)^2$, obținem că există $\lim\limits_{n\to\infty}\left(A_{n,n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{4}(b-a)^2$. Deci: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b\left((x-a)\cdot(b-x)\right)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{4}(b-a)^2$.