APLICAȚII NUMERICE ALE ANALIZEI MATEMATICE

În ultimele decenii matematica aplicată s-a dezvoltat impetuos. Matematica se aplică cu succes în tehnică, în economie cât şi în diverse ramuri ale științei. Analiza matematică joacă un rol de bază în acest proces.

În acest paragraf voi ilustra pe câteva cazuri simple, modul cum se pot aplica la calculul numeric unele teoreme de analiză matematică care se studiază în liceu. Exerciții asemănătoare se pot rezolva şi la clasă deoarece oferă soluţii mai simple şi mai elegante de rezolvare a problemelor de acest gen.

1^0. Aplicații numerice ale teoremei creșterilor finite

Teorema lui Lagrange (teorema creșterilor finite).

Fie o funcţie $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ cu proprietățiile:

a) f este continuă pe $[a, b]$;

b) f este derivabilă pe (a,b).

Atunci există cel pu]in un punct $c \in (a,b)$ astfel încât:

(1.) $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ (formula creșterilor finite).

Se poate exprima formula creșterilor finite şi sub altă formă:

Afirmația "există $c \in (a,b)$" este echivalentă cu: există $\theta \in (0,1)$ astfel încât $c-a=\theta(b-a)$.

Punând $b=a+h$, rezultă că teorema creșterilor finite se enunță astfel:

Dacă funcţia $f: [a, a+h] \to \mathbf{R}$ este continuă pe $[a, a+h]$ şi derivabilă pe $(a,a+h)$, atunci există θ, $0<\theta<1$, astfel încât:

(2.) $f(a+h)-f(a)=h f'(a+\theta h)$.

Exercițiul 1. Folosind teorema lui Lagrange să se determine eroarea care se face dacă se înlocuiește $\sqrt{145}$ prin 12.

Soluţie: Fie $f: [0, +\infty] \to \mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$, $(\forall)x>0$, $a=144$ şi $b=145$.

Aplicând funcţiei f teorema lui Lagrange pe intervalul $[144, 145]$ rezultă că există $\theta \in (0,1)$, astfel încât:

$f(a+1)-f(a)=1 \cdot f'(a+\theta)$,

adică: $\sqrt{145}-\sqrt{144}=1 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{144+\theta}}$ cu $0<\theta<1$.

Deoarece $\dfrac{1}{\sqrt{144+\theta}} < \dfrac{1}{\sqrt{144}} = \dfrac{1}{12}$, rezultă: $12 < \sqrt{145} < 12 + \dfrac{1}{24}$.

Cum $\dfrac{1}{24} < 0{,}05$, avem: $12<\sqrt{145}<12{,}05$.

Concluzia: Eroarea comisă este mai mică decât 0,05.

Exercițiul 2. Să se calculeze valoarea aproximativă a lui **cos** 61^0.

Soluţie: Funcţia $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\cos x$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, verifică condi]iile din teorema lui Lagrange. Luăm $a=60^0$ şi $h=1^0$.

Aplicând lui f formula creșterilor finite (2.), obţinem:

$\cos 61^0 - \cos 60^0 = 1 \cdot \dfrac{-\pi}{180} \sin(60^0 + \theta)$, unde $0<\theta<1$. (1)

Deoarece $\sin(60^0+\theta)>\sin60^0$, rezultă că: $-\sin(60^0+\theta)<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

și deci $\cos61^0-\cos60^0<-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{360}$, sau $\cos61^0<\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{360}$ (2).

Am obţinut astfel un majorant al lui $\cos61^0$. Să găsim acum un minorant al lui $\cos61^0$. Pentru aceasta este suficient să găsim un majorant al lui $\sin(60^0+\theta)$.

În acest scop, aplicăm din nou teorema creșterilor finite funcţiei $\sin(60^0+\theta)$ şi obţinem:

$$\sin(60^0+\theta)-\sin60^0=\theta\frac{\pi}{180}\cos(60^0+\theta_1\theta),\ \text{cu } 0<\theta_1<1.$$

Deoarece $0<\theta<1$ şi $\cos(60^0+\theta_1\theta)<\cos60^0=\dfrac{1}{2}$, rezultă:

$$\sin(60^0+\theta)-\sin60^0<\frac{\pi}{360}\ \text{ şi deci: }\quad \sin(60^0+\theta)<\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{360}.$$

Ținând seama de (1), obţinem: $\cos61^0-\cos60^0>\dfrac{-\pi}{180}\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{360}\right]$ (3).

Din (2) şi (3) deducem: $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{360}-\dfrac{\pi^2}{180\cdot360}<\cos61^0<\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{360}$ (4).

Deoarece $0,0150<\dfrac{\pi\sqrt{3}}{360}<0,0151$ şi $\dfrac{\pi^2}{180\cdot360}<\dfrac{1}{6480}$, obţinem:

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}<0,4849\ \text{ şi }\ \frac{1}{6480}<\frac{2}{10000},$$

de unde rezultă că:

$$0,4848<\cos61^0<0,4849 \qquad (5).$$

Relaţiile (5) ne permite să scriem: $\cos61^0\approx0,4848$ cu o eroare $\leq0,0001$.

O teoremă de medie utilă

Teoremă. Fie un interval $I\subset\mathbf{R}$ şi o funcţie $f:I\to\mathbf{R}$ cu proprietățiile:

(i) f este derivabilă pe I cu f' continuă pe I;

(ii) f' este derivabilă pe **Int**I.

Atunci, pentru orice $a,b\in I$, există un punct c situat între a şi b, astfel încât:

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{1}{2!}(b-a)^2f''(c).$$

Demonstrație: Dacă $a=b$, teorema este verificată în mod banal. Presupunem că $a\neq b$. Fie numărul:

$$\beta=\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{\frac{1}{2!}(b-a)^2}$$

și funcţia $g:I\to\mathbf{R}$ definită pentru orice $x\in I$ prin:

$$g(x)=f(x)-f(b)+(b-a)f'(x)+\frac{1}{2!}(b-x)^2\beta.$$

Ținând seama de ipoteză, rezultă că g este continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe (a,b).

Avem:

$g'(x)=f'(x)-f'(x)+(b-x)f''(x)-(b-x)\beta=(b-x)(f''(x)-\beta)$ şi $g(a)=g(b)=0$.

Aplicând teorema lui Rolle, deducem existența unui punct $c\in(a,b)$ astfel încât:

$$0=g'(c)=(b-c)(f''(c)-\beta),$$

de unde rezultă că:

$$f''(c)=\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{\frac{1}{2!}(b-a)^2},$$

sau

$$f(b)-f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{1}{2!}(b-a)^2f''(c).$$

<u>Exercițiul 3.</u> Să se arate că $\sin(x+h)$ diferă de $\sin x+h\cos x$ prin mai puțin de $\frac{h^2}{2}$.

Soluţie: Luând în teorema de mai sus $a=x$ şi $b=x+h$, obţinem:

$\sin(x+h)=\sin x+h\cos x-\frac{h^2}{2}\sin c$, unde $x<c<h$, de unde rezultă:

$$|\sin(x+h)-(\sin x+h\cos x)|=\frac{h^2}{2}|\sin c|\leq\frac{h^2}{2}.$$

<u>Exercițiul 4.</u> Să se arate că nu există nici o funcţie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu proprietățile:

$$f(x)\geq 0 \text{ şi } f''(x)<0 \text{ pentru } (\forall)x\in\mathbf{R}.$$

Soluţie: Deoarece $f''(x)<0$, pentru $(\forall)x\in\mathbf{R}$, rezultă că f' este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$ şi deci există $x_0\in\mathbf{R}$ astfel încât $f'(x)\neq 0$.

Pentru $b=x$ şi $a=x_0$, formula din teoremă devine:

$$f(x)-f(x_0)=f'(x)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(c)(x-x_0)^2, \text{ unde } x_0<c<x.$$

Deoarece $f''(c)<0$, rezultă că: $f(x)-f(x_0)<f'(x)(x-x_0)$.

Dacă $f'(x)>0$, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x_0)(x-x_0)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-f(x_0)]=-\infty$. Prin urmare, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ şi deci există o vecinătate a lui $-\infty$ unde f este strict negativă (absurd).

Dacă $f'(x_0)<0$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x_0)(x-x_0)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$. Și în acest caz f este strict negativă pe o vecinătate a lui $+\infty$, ceea ce nu se poate.

Contradicțiile la care am ajuns demonstrează afirmațiile din exercițiul 4.

Exercițiul 5. Să se arate că pentru orice număr real $b>0$ are loc inegalitatea:

$$\left|(1+b)^{\frac{1}{2}}-\left(1+\frac{1}{2}b\right)\right|<\frac{1}{8}b^2.$$

Soluţie: Fie $I=[0,+\infty)$ şi $f: I\to\mathbf{R}$ definită pentru orice $x\in I$ prin $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}$.

Funcţia f este derivabilă pe I, $f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ este continuă, derivabilă pe I şi avem: $f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, (\forall)x\in I.$

Fie $a=0$ şi $b>0$. Aplicând teorema, rezultă că există $c\in(a,b)$ astfel încât:

$$(1+b)^{\frac{1}{2}}=1+b\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b^2\left(-\frac{1}{4}\right)(1+c)^{-\frac{3}{2}}.$$

Deoarece $c>0$, avem: $1<(1+c)^{\frac{3}{2}}$ și deci $(1+c)^{-\frac{3}{2}}<1$.

Rezultă că:

$$\left|(1+b)^{\frac{1}{2}}-\left(1+\frac{1}{2}b\right)\right|=\frac{1}{8}b^2(1+c)^{-\frac{3}{2}}<\frac{1}{8}b^2.$$

Exercițiul 6. Să se calculeze valoarea aproximativă a lui $\sqrt{5}$.

Soluţie: Ținând seama de exercițiul 5., avem:

$$\sqrt{5}=\sqrt{4+1}=2\sqrt{1+\frac{1}{4}}\approx 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)=2\left(1+\frac{1}{8}\right)=2+\frac{1}{4}=2{,}25.$$

Eroarea comisă este în valoare absolută mai mică decât:

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8\cdot 16}=\frac{1}{128}.$$

Aplicație a teoremei de medie pentru integrale

Teoremă. Dacă $f: [a,b]\to\mathbf{R}$, $a<b$, este o funcţie continuă, atunci există cel puțin un punct $\xi\in[a,b]$ astfel încât:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi).$$

Numărul $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se numește media lui f pe intervalul $[a,b]$.

Exercițiul 7. Să se arate că:

$$0\le\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{arctg}x\,dx\le\frac{\pi}{4}.$$

Soluţie: Aplicând teorema de medie, există $\xi\in[0,1]$ astfel încât

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\operatorname{arctg}x\,dx = \sqrt{1-\xi^2}\operatorname{arctg}\xi.$$

Dar $0 \le \sqrt{1-\xi^2} \le 1$ şi $0 \le \operatorname{arctg}\xi \le \frac{\pi}{4}$ şi se obţine:

$$0 \le \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\operatorname{arctg}x\,dx \le \frac{\pi}{4}.$$

Exerciţiul 8. Fără a calcula efectiv integrala, să se arate că:

$$\sqrt{3}-1 < \frac{24}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\operatorname{tg}x}dx < 1.$$

Soluţie: Fie funcţia $f(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}x}$ pentru $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Aplicăm teorema de medie

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\operatorname{tg}x}dx = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)F'(\xi) = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)f(\xi) = \frac{\frac{\pi}{12}}{1+\operatorname{tg}\xi}.$$

Cum $\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{3}$ şi funcţia tangentă este monoton descrescătoare, rezultă:

$$\frac{\frac{\pi}{12}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} > \frac{\frac{\pi}{12}}{1+\operatorname{tg}\xi} > \frac{\frac{\pi}{12}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}, \text{ adică}$$

$$\frac{\pi}{24} > \frac{\frac{\pi}{12}}{1+\operatorname{tg}\xi} > \frac{\pi}{12}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\pi}{24}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Deci $\frac{\pi}{24} > 1 > \frac{\pi}{24}\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Rezultă: $\sqrt{3}-1 < \frac{24}{\pi}I < 1$.