CALCULUL ARIILOR SUPRAFEŢELOR DE ROTAŢIE

Definiţia 1. Fie E o submulţime a planului $\mathbf{R}^2$. Spunem că mulţimea E este elementară dacă există un număr natural $n\geq 1$ şi n dreptunghiuri $D_1,...,D_n$ cu următoarele proprietăţi:

a) dreptunghiurile $D_1,...,D_n$ au laturile paralele cu axele de coordonate (adică pentru fiecare $j\in\{1,...,n\}$, există numerele reale a_j,b_j,c_j,d_j cu $a_j\leq b_j$; $c_j\leq d_j$ astfel încât $D_j=[a_j,b_j]\times[c_j,d_j]$;

b) pentru fiecare $i,j\in\{1,...,n\}$ cu $i\neq j$, dreptunghiurile D_i şi D_j au cel mult o latură comună;

c) $E=\bigcup\{D_i; i\in\{1,...,n\}\}$.

În acest caz aria mul]imii E, notată aria(E), este dată de relaţia:

$$A=\text{aria}(E)=\sum_{i=1}^{n} aria(D_i).$$

Definiţia 2. Fie A o mulţime mărginită din plan. Spunem că A are arie, dacă există două şiruri $(E_n)_{n\in\mathbf{N}};(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de mulţimi elementare E_n şi F_n ($n\in\mathbf{N}$) astfel încât:

a) $E_n\subseteq A\subseteq F_n$ oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$;

b) şirurile de numere reale pozitive:

$(\text{aria}(E_n))_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(\text{aria}(F_n))_{n\in\mathbf{N}}$ sunt convergente;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\text{aria}(E_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\text{aria}(F_n)$.

Dacă mul]imea A are arie, atunci numărul real pozitiv $A=\text{aria}(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\text{aria}(E_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\text{aria}(F_n)$ se numeşte aria mulţimii A.

Teorema 1. Fie A şi B două mulţimi mărginite din plan.

1^0 Dacă mulţimile A şi B au arie atunci mul]imile $A\cup B$; $A\cap B$; $A\setminus B$ au arie;

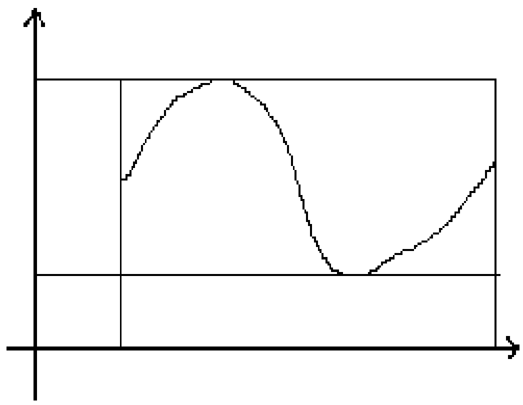
2^0 Dacă mulţimile A şi B au arie şi $A\cap B=\Phi$, atunci $\text{aria}(A\cup B)=\text{aria}(A)+\text{aria}(B)$;

3^0 Dacă mulţimile A şi B au arie şi $B\subseteq A$ atunci $\text{aria}(A\setminus B)=\text{aria}(A)-\text{aria}(B)$.

Definiţia 3.1.4. Fie $a,b\in\mathbf{R}$, cu $a<b$ şi $f:[a,b]\to[0,+\infty)$ o funcţie. Mulţimea din plan delimitată de graficul funcţiei f, dreptele de ecuaţie $x=a$; $x=b$ şi axa Ox, se numeşte subgraficul funcţiei f şi se notează Γ_f:

$\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 / a\leq x\leq b; 0\leq y\leq f(x)\}$.

Teorema 2. Fie $a,b\in\mathbf{R}$ cu $a<b$ şi $f:[a,b]\to[0,+\infty)$ o funcţie. Dacă funcţia f este continuă pe $[a,b]$ atunci:



1^0 Mulţimea Γ_f din plan are arie;

2^0 Aria este dată de:

$$\text{aria}(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)dx.$$

Demonstraţie: Fie $\Delta=(a=x_0^n<...<x_{pn}^n=b)$ un şir de diviziuni astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta\|=0$. Notăm m_i^n -marginea inferioară a funcţiei f pe

intervalul închis şi mărginit $[x_{i-1}^n, x_i^n]$ şi cu M_i^n -marginea superioară.
Orice funcţie continuă pe un interval închis şi mărginit J îşi atinge marginile, deci:
$(\exists)u_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$ astfel încât $f(u_i^n)=m_i^n$;
$(\exists)v_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$ astfel încât $f(v_i^n)=M_i^n$.

Fie $D_i^n=[x_{i-1}^n, x_i^n]\times[0, m_i^n]$;

$G_i^n=[x_{i-1}^n, x_i^n]\times[0, M_i^n]$, dreptunghiuri de bază $x_i^n-x_{i-1}^n$, şi înălţime m_i^n, respectiv M_i^n.

Mulţimile elementare

(1.) $E_n=\bigcup_{i=1}^{p_n} D_i^n$ $\quad F_n=\bigcup_{i=1}^{p_n} G_i^n$ verifică incluziunile

(2.) $E_n \subset \Gamma_f \cup F_n$

iar ariile lor sunt:

(3.) aria(E_n)= $\sum_{i=1}^{n} m_i^n(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{p_n} f(u_i^n)((x_i^n - x_{i-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(f, u_i^n)$

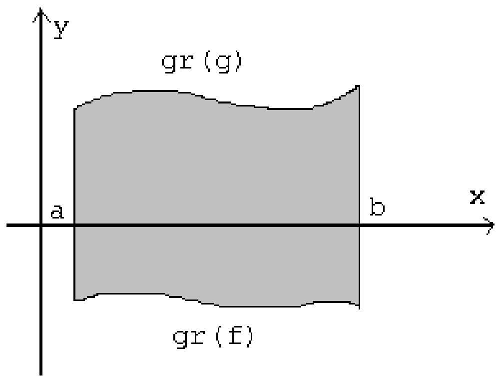
(4.) aria(F_n)= $\sum_{i=1}^{n} M_i^n(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{p_n} f(v_i^n)((x_i^n - x_{i-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(f, v_i^n)$

Funcţia f fiind continuă este integrabilă şi conform cu (1.); (3.); (4.) rezultă;

(5.) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, u_i^n) = \lim_{n\to\infty} aria(E_n) = \\ = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, v_i^n) = \lim_{n\to\infty} aria(F_n)$$

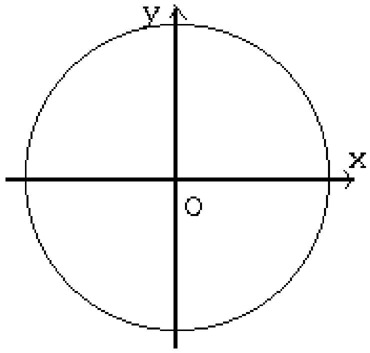
Şirurile de mulţimi elementare (E_n) şi (F_n) verificând relaţiile (2.) şi (5.), rezultă mulţimea Γ_f are arie şi aria(Γ_f)=$\int_a^b f(x)dx$.

<u>*Consecinţa 3.1.6.*</u> Dacă f,g: $[a,b]\to\mathbf{R}$ sunt funcţii continue astfel încât $f(x)\le g(x)$, $(\forall)x\in[a,b]$ atunci $\Gamma_{f,g}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 / a\le x\le b;\ f(x)\le y\le g(x)\}$ cuprinsă între graficele funcţiilor f şi g şi dreptele paralele la Oy care taie axele în punctele a şi b are arie şi aria($\Gamma_{f,g}$)=$\int_a^b [g(x)-f(x)dx]dx$.



Dacă $g(x)\ge f(x)\ge 0$, $(\forall)x\in[a,b]$ atunci aria($\Gamma_{f,g}$)=aria(Γ_g)-aria(Γ_f).

<u>Exemplul 1.</u> <u>Aria cercului</u>
Cercul cu vârful în origine şi rază R are ecua]ia: (C):$x^2+y^2=R^2$ din care se deduc ecuaţiile semicercurilor (C_1): $y=\sqrt{R^2-x^2}$, (C_2): $y=\sqrt{R^2-x^2}$ atunci:



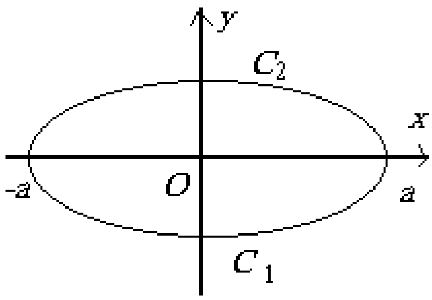
aria(C)= $2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx = 4\int_{0}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$. Facem schimbarea de variabilă: x=Rsin$t$; x=0 rezultă t=0; x=R rezultă $t=\frac{\pi}{2}$,

$$\text{aria}(C)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}R\cos t dt=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt^2=$$

$$=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\pi R^2$$

Deci aria(C)=πR^2.

Exemplul 2. Aria elipsei



Ecuaţia elipsei este (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. Ecuaţiile curbelor ($C_1$) şi ($C_2$), semielipsele situate sub Ox sau deasupra lui Ox sunt date de (C_1): $y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; (C_2): $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; x∈[a,b]
aria(E)=

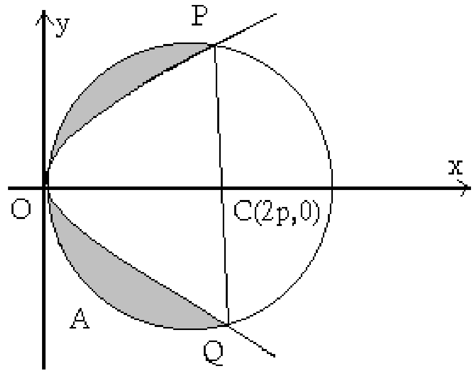
$$\text{aria}(E)=2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=4\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx\overset{x=a\sin t}{=}4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2 tdt=$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=2ab\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin 2t}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=\pi ab\ .$$

Deci aria(E)=πab.

Exemplul 3. Să se găsească aria mulţimii A cuprinse între cercul de ecuaţie (C):$x^2+y^2=4px$ şi parabola (P):$y^2=2px$.

$$\begin{cases}y^2=2px\\x^2+y^2=4px\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0;x=2p\\y=0;y=\pm 2p\end{cases}.$$ Deci, parabola şi cercul se intersectează în punctele $O(0,0)$; $P(2p,2p)$; $Q(2p,-2p)$. Este suficient să calculăm aria mul]imii A_1 cuprinsă între arcul de parabolă OP şi arcul de cerc OP, adică aria mulţimii cuprinse între graficele funcţiilor: $f(x)=\sqrt{2px}$; $0\le x\le 2p$, $g(x)=\sqrt{4px-x^2}$; $0\le x\le 2p$. Funcţiile f şi g fiind pozitive, avem:



aria(A_1)=aria(Γ_g)-aria(Γ_f)

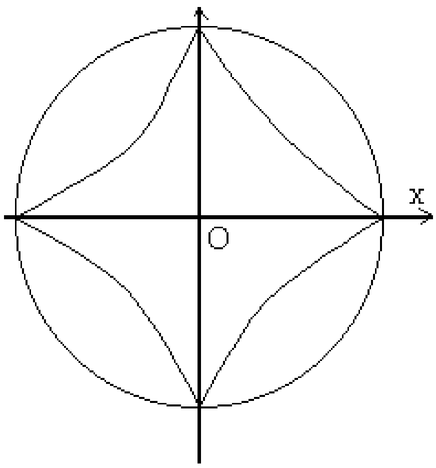
aria$(\Gamma_f)=$

$$=\int_0^{2p} f(x)dx=\sqrt{2p}\int_0^{2p} x^{\frac{1}{2}}dx=\sqrt{2p}\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{2p}=\frac{8}{3}p^2$$

aria(Γ_g)=$\frac{1}{4}\pi(2p)^2=\pi p^2$

aria(A)=2aria(A_1)=$2\left(\pi p^2-\frac{8}{3}p^2\right)=2p^2\left(\pi-\frac{8}{3}\right)$

<u>Exemplul 4.</u> Să se calculeze aria delimitată de curba (astroida) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, $a>0$.



Notăm $\Gamma=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2/-a\le x\le y;\ -a\le y\le a\}$ şi $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, a>0}. Din:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\,|:a^{\frac{2}{3}}\Rightarrow\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1\Rightarrow$$

$\Rightarrow\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=\cos t$; şi $\Rightarrow\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=\sin t$; rezultă $x=a\cos^3 t$ şi $y=a\sin^3 t$ şi cum t scade de la $\pi/2$ la 0 când x creşte de la 0 la a, avem:

$$aria(\Gamma)=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(a\sin^3 t)3a\cos^2 t(-\sin t)dt=$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,dt=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\,\frac{1-\cos 4t}{8}\,dt=\frac{3}{8}\pi a^2$$

Rezultă aria=$\frac{3}{8}\pi a^2$.