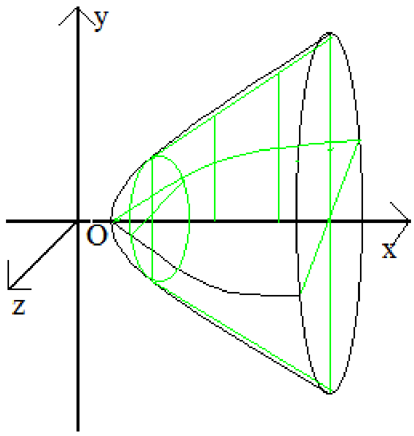
# ARIA SUPRAFEŢELOR DE ROTAŢIE

*Definiţia 1.* Dacă $f$: $[a,b]\to\mathbf{R}_+$ este o funcţie continuă, atunci mulţimea $S_f=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3/\sqrt{y^2+z^2}=f(x),(\forall)x\in[a,b]\}$ se numeşte <u>suprafaţă de rotaţie</u> determinată de funcţia $f$ sau suprafaţa obţinută prin rotirea graficului funcţiei $f$ în jurul axei $Ox$.

*Definţia 2.* Fie $f$: $[a,b]\to\mathbf{R}_+$ o funcţie continuă. Spunem că suprafaţa de rotaţie




$S_f$ <u>are arie</u> dacă oricare ar fi şirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ale intervalului $[a,b]$ astfel încât $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$, şirul $(A(f_{\Delta n}))_{n\in\mathbf{N}}$ al ariilor laterale ale suprafeţelor de rotaţie $S(f_{\Delta n})_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent în $\mathbf{R}$. În acest caz numărul real pozitiv $A(f)\overset{def}{=}\lim_{n\to\infty}A(f_{\Delta_n})$ se numeşte <u>aria laterală</u> a suprafeţei de rotaţie $S(f)$.

**Teorema 1.** Dacă $f$: $[a,b]\to\mathbf{R}_+$ este o funcţie derivabilă cu derivata continuă, atunci suprafaţa de rotaţie determinată de $f$ are arie şi

$$A(F)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

*Demonstraţie:* $f$ este continuă pe $[a,b]$ rezultă $(\forall)\varepsilon>0,(\exists)\eta_\varepsilon>0$ astfel încât:

(1.) $(\forall)x',x''\in[a,b]\ cu\ |x'-x''|<\eta_\varepsilon\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{4\pi l(f)}$, unde $l(f)$ este lungimea graficului lui $f$.

Fie $\Delta_n=(a=x_0^n<\ldots<x_{pn}^n=b)$; $n\in\mathbf{N}$ un şir de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ astfel încât $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$. Atunci există un $\eta_\varepsilon\in\mathbf{N}$ astfel încât $\|\Delta_n\|<\eta_\varepsilon;(\forall)n\geq\eta_\varepsilon$.

Aplicând teorema creşterilor finite funcţiei $f$ pe fiecare interval $[x^n_{i-1},x^n_i]$ obţinem un $\xi^n_i\in(x^n_{i-1},x^n_i)$ cu proprietatea

(2.) $f(x_i^n)-f(x_{i-1}^n)=f'(\xi_i^n)(x_i^n-x_{i-1}^n)$

Atunci $\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}\left(f\sqrt{1+(f')^2},\xi_i^n\right)=\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

Deci există $\eta_\varepsilon''\in\mathbf{N}$ astfel încât:

(3.) $\left|\sigma_{\Delta_n}\left(f\sqrt{1+(f')^2},\xi_i^n\right)-\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\right|<\dfrac{\varepsilon}{2},(\forall)n\geq\eta_\varepsilon''$

Deşi aria laterală a lui $S(f_{\Delta n})$

$$A(f\Delta_n)=\pi\sum_{i=1}^{p_n}\left(f(x_{i-1}^n)+f(x_i^n)\right)\sqrt{1+[f'(\xi_i^n)]^2}\,(x_i^n-x_{i-1}^n)$$

nu reprezintă suma Riemann

$$\sigma_{\Delta_n}\left(2\pi f\sqrt{1+(f')^2},\xi_i^n\right)=2\pi\sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i^n)\sqrt{1+[f'(\xi_i^n)]^2}\,(x_i^n-x_{i-1}^n)$$

vom arăta totuşi că diferenţa lor în modul este mai mică decât $\frac{\varepsilon}{2}$.

Fie $n\geq n_\varepsilon \overset{def}{=} \max(n_\varepsilon', n_\varepsilon'')$. Atunci $\left|x_{i-1}^n-\xi_i^n\right|,\left|x_i^n-\xi_i^n\right|\leq x_i^n-x_{i-1}^n<\|\Delta_n\|<\eta_\varepsilon$ ţinând seama de (1.) rezultă

$$\left|f(x_{i-1}^n)-f(\xi_i^n)\right|<\frac{\varepsilon}{4\pi l(f)} \quad si$$

$$\left|f(x_i^n)-f(\xi_i^n)\right|<\frac{\varepsilon}{4\pi l(f)}$$

de unde:

$$(4.)\ \left|f(x_{i-1}^n)-f(x_i^n)\right|-2f(\xi_i^n)<\frac{\varepsilon}{2\pi l(f)},\ (\forall)n\geq n_\varepsilon.$$

Folosind inegalitatea (4.), obţinem:

$$\left|A(f\Delta_n)-\sigma_{\Delta_n}\left(2\pi f\sqrt{1+(f')^2},\xi_i^n\right)\right|=$$

$$=\left|\pi\sum_{i=1}^{p_n}[f(x_{i-1}^n)+f(x_i^n)-2f(\xi_i^n)]\sqrt{1+[f'(\xi_i^n)]^2}\,(x_i^n-x_{i-1}^n)\right|\leq$$

$$\leq\pi\sum_{i=1}^{p_n}\left|f(x_{i-1}^n)+f(x_i^n)-2f(\xi_i^n)\right|\sqrt{1+[f'(\xi_i^n)]^2}\,(x_i^n-x_{i-1}^n)<$$

$$<\pi\frac{\varepsilon}{2\pi l(f)}\sum_{i=1}^{p_n}\sqrt{1+[f'(\xi_i^n)]^2}\,(x_i^n-x_{i-1}^n)=\frac{\varepsilon}{2l(f)}l(f\Delta_n)\leq\frac{\varepsilon}{2};\ (\forall)n\geq n_\varepsilon$$

Din această inegalitate şi inegalitatea (3.) rezultă că pentru orice $n\geq n_\varepsilon$

$$\left|A(f\Delta_n)-2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx\right|\leq\left|A(f\Delta_n)-\sigma_{\Delta_n}(2\pi f(\sqrt{1+(f')^2},\xi_i^n\right|+$$

$$+\left|\sigma_{\Delta_n}(2\pi f(\sqrt{1+(f')^2},\xi_i^n-2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,(\forall)n\geq n_\varepsilon$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}\left(2\pi f\sqrt{1+[f'(x)]^2},\xi_i^n\right)$ există şi este egală cu

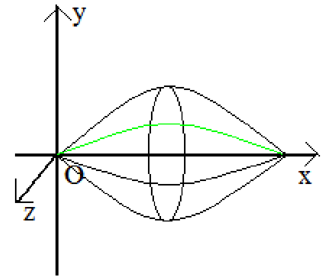
$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Cum aceasta are loc pentru orice şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ale lui $[a,b]$ de normă tinzând la zero, rezultă că suprafaţa de rotaţie determinată de $f$ are arie şi

$$A(f)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

**Teorema 2.** Dacă $f:[a,b]\to\mathbf{R}_+$ este o funcţie derivabilă, cu derivata continuă pe $(a,b)$ astfel încât funcţia $f\sqrt{1+(f')^2}$ are limite finite în punctele $a$ şi $b$, atunci suprafaţa de rotaţie determinată de *f* are arie şi $A(f)=2\pi\int_a^b h(x)dx$, unde *h* este prelungirea (prin continuitate) a lui $f\sqrt{1+(f')^2}$ la intervalul $[a,b]$.

Exemplul 1. Să se calculeze aria suprafeţei de rotaţie determinate de funcţia $f(x)=\sin x$, $x\in[0,\pi)$.



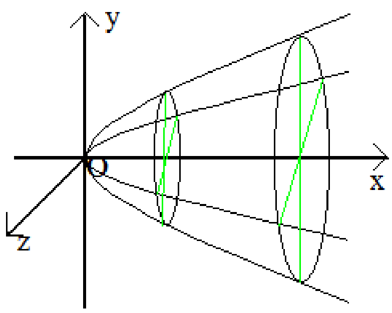

Funcţia de mai sus este derivabilă cu derivata continuă pe **R**, deci *f* satisface condiţiile teoremei 3. Datorită simetriei este suficient să calculăm aria suprafe]ei determinate de restricţia $f_0$ a lui *f* la intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Deci,

$$A(f)=2A(f_0)=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx$$

Facem schimbarea de variabilă u=cosx;du=-sinxdx; x=0 rezultă u=1; x=π/2 rezultă u=0.

$$A(f)=-4\pi\int_1^0\sqrt{1+u^2}du=4\pi\int_0^1\sqrt{1+u^2}du=\frac{4\pi}{2}\left[u\sqrt{1+u^2}+\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]\Bigg|_0^1=$$
$$=2\pi\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$$

Exemplul 2. Să se calculeze aria suprafeţei de rotaţie determinată de funcţia $f(x)=\sqrt{2ax}$, $x\in(0,b]$ $(a>0)$ (paraboloid de rotaţie)




Această funcţie nu este derivabilă în origine, deci nu se poate aplica teorema 3. Totuşi *f* este derivabilă cu derivata continuă pe $(0,b]$, iar funcţia $f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}=\sqrt{a}\sqrt{2x+a}$; $(\forall)x\in(0,b]$ are limită finită în punctul 0;

$$\lim_{x\to 0}f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}=a$$

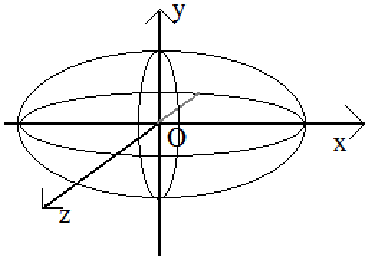
Deci funcţia $h:[0,b]\to\mathbf{R}_+$ definită prin:

$$h(x)\overset{def}{=}\begin{cases}a; & daca\quad x=0\\ f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}, & daca\ x\in(0,b]\end{cases}$$

este continuă pe $[0,b]$ Aplicând teorema 4. rezultă că suprafaţa de rotaţie determinată de funcţia $f(x)=\sqrt{2ax}$, $x\in[0,b]$ are arie şi

$$A(f)=2\pi\int_0^b h(x)dx=2\pi\sqrt{a}\int_0^b\sqrt{2x+a}dx=\pi\sqrt{a}\int_0^b(2x+a)^{\frac{1}{2}}(2x+a)'dx=$$
$$=\pi\sqrt{a}\frac{(2x+a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^b=\frac{2\pi\sqrt{a}}{3}\left[(a+2b)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right].$$

Exemplul 3. Să se calculeze aria suprafeţei obţinute prin rotirea în jurul axei $Ox$




a elipsei de ecuaţie $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,($a$>$b$>0).

$$f(x)\overset{def}{=}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ ;x\in[-a,a].$$

Se obţine:

$$A(f)=2\pi\int_{-a}^{a} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=$$

$$=2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{f^2(x)+\left[f(x)f'(x)\right]^2}\,dx=$$

$$=2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{b^2+\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{b^4}{a^4}x^2}\,dx=\frac{2\pi b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}\,dx=\frac{2\pi b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx,$$

unde $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{c}{a}$ se numeşte excentricitatea elipsei.

$$A(f)=\frac{4\pi b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-(ex)^2}\,dx=\frac{4\pi be}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{\left(\frac{a}{e}\right)^2-x^2}\,dx=$$

$$=\frac{2\pi be}{a}\left[\left(\frac{a}{e}\right)^2\arcsin\frac{x}{\frac{a}{c}}+x\sqrt{\left(\frac{a}{e}\right)^2-x^2}\right]\Bigg|_0^a=\frac{2\pi be}{a}\left[\left(\frac{a}{e}\right)^2\arcsin e+a\sqrt{\left(\frac{a}{e}\right)^2-a^2}\right]=$$

$$=\frac{2\pi be}{a}\left[\left(\frac{a}{e}\right)^2\arcsin e+\frac{a^2}{e}\sqrt{1-e^2}\right]=2\pi ab\left[\frac{\arcsin e}{e}+\sqrt{1-e^2}\right].$$

Observatie. Dacă $b$ tinde la $a$ atunci $e$ tinde spre zero şi elipsa devine un cerc de rază $a$, care prin rotaţie dă sfera. În acest caz $\lim\limits_{e\to 0}\dfrac{\arcsin e}{e}=1$. Rezultă aria sferei de rază a este $4\pi a^2$.