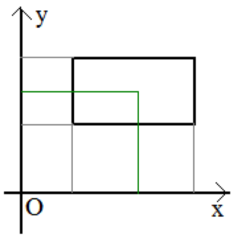
CENTRE DE GREUTATE

În practică este nevoie să se calculeze aria plăcilor plane, de aceea vom identifica plăcile plane cu mulţimi $\mathbf{R}^2$. Ştim că masa este o măsură a cantităţii de materie dintr-un corp. Deci masa reprezintă o funcţie $A \to m(A)$ care asociază fiecărei plăci plane A un număr real pozitiv $m(A)$, numit masa lui A. Această funcţie satisface condiţiile:

(M_1) Dacă placa A se descompune în n plăci plane disjuncte $A_1,...,A_n$, atunci $m(A)=m(A_1)+...+m(A_n)$;

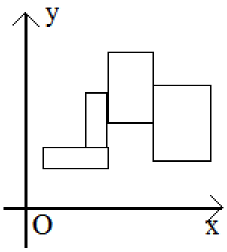
(M_2) Masa $m(A)$ a unei plăci plane A rămâne constantă în timpul mişcării.



Definiţia 1. O placă A se numeşte omogenă dacă există o constantă $k>0$ astfel încât $m(B)=k\cdot$aria(B), pentru orice parte B a lui A.

Dacă $D=[a,b]\times[c,d]$ este o placă dreptunghiulară omogenă atunci $(\exists)k\geq 0$ astfel încât $m(D)=k\cdot$aria$(D)=k(b-a)(d-c)$.

Definiţia 2. Centrul de greutate al acestei plăci se defineşte ca fiind

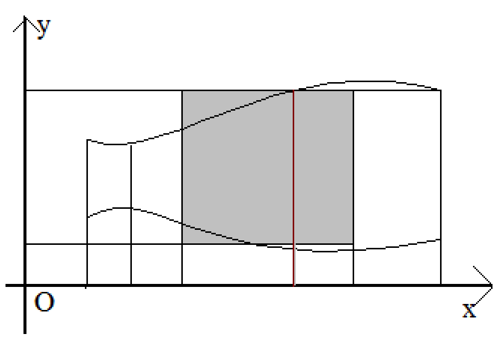


punctul $(\overline{x},\overline{y})\in\mathbf{R}^2$ de coordonate $\overline{x} \overset{def}{=} \frac{1}{2}(b-a)$ şi $\overline{y} \overset{def}{=} \frac{1}{2}(d+c)$.

Fie E o placă elementară formată din plăcile dreptunghiulare $D_1,...,D_n$ cu masele $m(D_1),...,m(D_n)$ şi care au centrele de greutate $(\overline{x}_1,\overline{y}_1),...,(\overline{x}_n,\overline{y}_n)$. Centrul de greutate a lui E va fi prin definiţie punctul $(\overline{x},\overline{y})$ de coordonate:

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)\overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)\overline{x}_i}{m(E)}$$

$$\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)\overline{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m(D_i)\overline{y}_i}{m(E)}.$$



Dacă E este omogenă atunci $(\exists)k>0$ astfel încât $m(B)=k\cdot$aria(B),$(\forall)$parte a B (care are arie) a lui E, rezultă $m(D_i)=k\cdot$aria(D_i),$(\forall)i\in\{1,...,n\}$. Rezultă :

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} aria(D_i)\overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} aria(D_i)},\ \overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n} aria(D_i)\overline{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} aria(D_i)}.$$

Fie $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ două funcţii continue astfel încât $f(x)\leq g(x)$, $(\forall)x\in[a,b]$. Considerăm mulţimea $\Gamma_{f,g}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 / a\leq x\leq b,\ f(x)\leq y\leq g(x)\}$ cuprinsă între graficele funcţiilor f,g şi dreptele paralele la Oy care taie axa Ox în a şi b.

Fie $\Delta=(a=x_0<...<x_n=b)$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ şi ξ_i mijlocul intervalului $[x_{i-1},x_i]$; $\xi_i=\frac{1}{2}(x_i-x_{i-1}),1\leq i\leq n$ şi dreptunghiul $D_i=[x_{i-1},x_i]\times[f(\xi_i),g(\xi_i)]$ a cărui arie este aria$(D_i)=(x_i-x_{i-1})\times[g(\xi_i)-f(\xi_i)]$.

Dacă norma diviziunii Δ este suficient de mică, atunci mulțimea $\Gamma_i=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2/x_{i-1}\leq x\leq x_i; f(x)\leq y\leq g(x)\}$ se aproximează cu dreptunghiul D_i, deci centrul de greutate a lui Γ_i se aproximează cu centrul de greutate a lui D_i, rezultă că centrul de greutate a lui $\Gamma_{f,g}=\bigcup_{i=1}^{n}\Gamma_i$, se aproximează cu centrul de greutate al mulțimii elementare $E_\Delta \stackrel{def}{=} \bigcup_{i=1}^{n} D_i$. Coordonatele centrului de greutate a lui D_i fiind $\overline{x_i}=\xi_i$; $\overline{y_i}=\frac{1}{2}[g(\xi_i)+f(\xi_i)]$, rezultă că centrul de greutate a lui E_Δ va avea coordonatele:

$$\overline{x}_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} aria(D_i)\overline{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} aria(D_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i[g(\xi_i)-f(\xi_i)](x_i-x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n}[g(\xi_i)-f(\xi_i)](x_i-x_{i-1})}$$

$$\overline{y}_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} aria(D_i)\overline{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} aria(D_i)} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[g^2(\xi_i)-f^2(\xi_i)](x_i-x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n}[g(\xi_i)-f(\xi_i)](x_i-x_{i-1})}.$$

Aceste considerații conduc la următoarea definiție:

Definiția 3. Dacă A este o placă plană care se identifică cu o mulțime de forma $\Gamma_{f,g}$, unde $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ sunt funcții continue atunci centrul de greutate a lui A este, prin definiție, punctul $(\overline{x}_A, \overline{y}_A)\in\mathbf{R}^2$ ale cărui coordonate sunt:

$$\overline{x}_A \stackrel{def}{=} \frac{\int_a^b x[g(x)-f(x)]dx}{\int_a^b [g(x)-f(x)]dx} = \frac{\int_a^b x[g(x)-f(x)]dx}{aria(\Gamma_{f,g})}$$

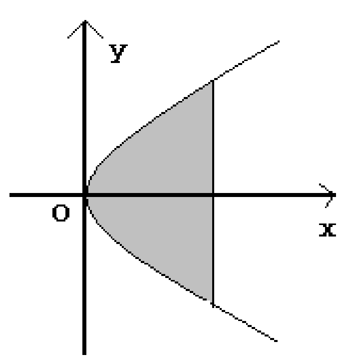
$$\overline{y}_A \stackrel{def}{=} \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g^2(x)-f^2(x)]dx}{\int_a^b [g(x)-f(x)]dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g^2(x)-f^2(x)]dx}{aria(\Gamma_{f,g})}.$$

Dacă $f(x)=0$ și $g(x)\geq 0, (\forall)x\in[a,b]$, atunci

$$\overline{x}_A = \frac{\int_a^b xg(x)dx}{aria(\Gamma_g)}; \qquad \overline{y}_A = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b g^2(x)dx}{aria(\Gamma_g)}.$$

<u>Exemplul 1.</u> Fie $a>0$ și o placă omogenă de forma $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2/0\leq x\leq a;\ y^2\leq ax\}$

Pentru a calcula centrul de greutate a plăcii A considerăm funcțiile $f,g:[0,a]\to\mathbf{R}_+$ definite prin:



$f(x) \stackrel{def}{=} -\sqrt{ax}$; $g(x) \stackrel{def}{=} +\sqrt{ax}$.

Atunci coordonatele centrului de greutate sunt:

$$\overline{x}_A = \frac{\int_0^a x[\sqrt{ax}-(-\sqrt{ax})]dx}{\int_0^a [\sqrt{ax}-(-\sqrt{ax})]dx} =$$

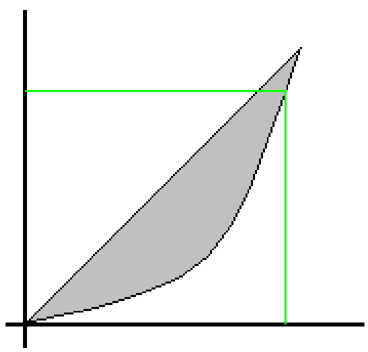
$$= \frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}dx}{2\int_0^a \sqrt{ax}dx} = \frac{a^{\frac{1}{2}}\int_0^a x^{\frac{3}{2}}dx}{a^{\frac{1}{2}}\int_0^a x^{\frac{1}{2}}dx} = \frac{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_0^a = \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}a$$

$$\overline{y}_A = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a [(\sqrt{ax})^2 - (-\sqrt{ax})^2]dx}{\int_0^a [\sqrt{ax} - (-\sqrt{ax})]dx} = \frac{0}{\int_0^a \sqrt{ax}dx} = 0 .$$

Rezultă $G\left(\frac{3}{5}a;0\right)$, deci centrul de greutate se află pe axa Ox, care este şi axă de simetrie a mulțimii A.

Exemplul 2. Să se determine centrul de greutate al plăcii omogene de forma

$$A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2/0\le x\le 1;\ x^2\le y\le ax\},\ a\ge 1.$$



Considerăm f,g: $[0,1]\to\mathbf{R}$ definite prin $f(x) \overset{def}{=} x^2$ şi $g(x) \overset{def}{=} ax$. Rezultă

$$\text{aria(A)} = \int_0^1 [g(x) - f(x)]dx = \int_0^1 (ax - x^2)dx = \left(a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3a-2}{6} ;\Rightarrow$$

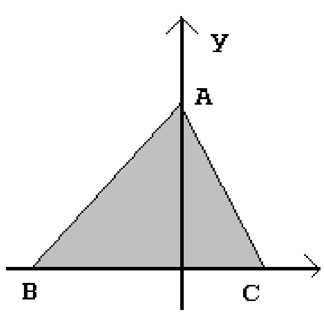
$$\overline{x}_A = \frac{\int_0^1 x(ax - x^2)dx}{aria(A)} = \frac{6}{3a-2}\int_0^1 (ax^2 - x^3)dx =$$

$$= \frac{6}{3a-2}\left[a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{6}{3a-2}\left(\frac{a}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{4a-3}{2(3a-2)}$$

$$\overline{y}_A = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 (a^2x^2 - x^4)dx}{aria(A)} = \frac{6}{3a-2}\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{5a^2-3}{5(3a-2)}.$$

În cazul particular a=1 centrul de greutate va fi situat în punctul $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)$.

Exemplul 3 Să se determine centrul de greutate al unei plăci plane omogene de forma unui triunghi.



Fie $A(0,a)$; $B(b,0)$ şi $C(c,0)$. Presupunem $b<0<c$. Ecuația dreptei ce trece prin A şi B va fi $y = -\frac{a}{b}(x-b)$, iar ecuația dreptei ce trece prin A şi C va fi $y = -\frac{a}{c}(x-c)$.

Notăm cu g: $[b,c]\to\mathbf{R}$ funcția definită prin:

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{a}{b}(x-b),\ dacax\in[b,0) \\ -\frac{a}{c}(x-c)\ dacax\in[0,c] \end{cases}$$ şi f: $[b,c]\to\mathbf{R}$, $f(x)$=0.

Mulțimea $\Gamma_{f,g}$ va fi în interiorul triunghiului ABC şi deci aria sa va fi egală cu $\frac{1}{2}(c-b)$.

Abscisa centrului de greutate al mulțimii $\Gamma_{f,g}$ va fi $\overline{x}_A = \dfrac{\int_a^b xg(x)dx}{aria(\Gamma_{f,g})}$, rezultă

$$\int_b^c xg(x)dx = \int_b^0 xg(x)dx + \int_0^c xg(x)dx = -\frac{a}{b}\int_b^0 x(x-b)dx - \frac{a}{c}\int_0^c x(x-c)dx =$$

$$-\frac{a}{b}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{bx^2}{2}\right)\Bigg|_b^0 - \frac{a}{c}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{cx^2}{2}\right)\Bigg|_0^c = -\frac{a}{b}\left(\frac{b^3}{2}-\frac{b^3}{3}\right) - \frac{a}{c}\left(\frac{c^3}{3}-\frac{c^3}{2}\right) =$$

$$= -\frac{ab^2}{6} + \frac{ac^2}{6} = \frac{a}{6}(c^2-b^2)$$

deci $\overline{x}_A = \dfrac{\frac{a}{6}(c^2-b^2)}{\frac{1a}{2}(c-b)} = \dfrac{1}{3}(b+c)$

Ordonata centrului de greutate a mulțimii $\Gamma_{f,g}$ va fi

$$\overline{y}_A = \frac{\frac{1}{2}\int_b^c g^2(x)dx}{aria(\Gamma_{f,g})}.$$

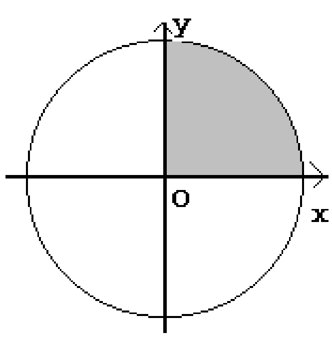
$$\int_b^c g^2(x)dx = \int_b^0 g^2(x)dx + \int_0^c g^2(x)dx = \frac{a^2}{b^2}\int_b^0 (x-b)^2dx + \frac{a^2}{c^2}\int_0^c (x-c)^2dx = \frac{a^2}{b^2}\frac{(x-b)^3}{3}\Bigg|_b^0 +$$

$$+\frac{a^2}{c^2}\frac{(x-c)^3}{3}\Bigg|_0^c = -\frac{1}{3}\frac{a^2}{b^2}b^3 + \frac{1}{3}\frac{a^2}{c^2}c^3 = \frac{1}{3}a^2(c-b)$$

Rezultă $\overline{y}_A = \dfrac{\frac{a^2}{b^2}(c-b)}{\frac{1}{2}a(c-b)} = \dfrac{a}{3}$.

Centrul de greutate are coordonatele $G\left(\frac{1}{3}(b+c), \frac{a}{3}\right)$ ceea ce reprezintă punctul de intersecție al medianelor ΔABC.

<u>Exemplul 4.</u> Să se găsească centrul de greutate al plăcii plane $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 / 0\le x\le R;\ 0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\}$.



$$\overline{x}_A = \frac{\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (R\cos t)\sqrt{R^2-R^2\cos^2 t}\,R\sin t dt = \frac{4R}{3\pi}$$

Analog $\overline{y}_A = \dfrac{4R}{3\pi}$, rezultă $G\left(\dfrac{4R}{3\pi}, \dfrac{4R}{3\pi}\right)$.

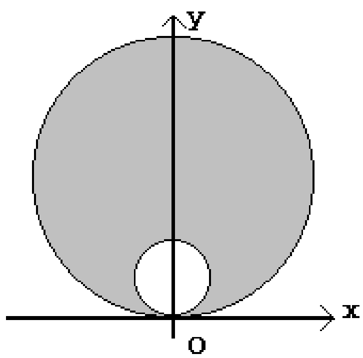
Teorema lui Guldin Fie $f,g: [a,b]\to\mathbf{R}$ $(0\le a\le b)$ două funcţii continue astfel încât $f(x)\le g(x)$, $(\forall)x\in[a,b]$ şi $\Gamma_{f,g}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2/a\le x\le b; f(x)\le y\le g(x)\}$. Atunci volumul generat prin rotirea lui $\Gamma_{f,g}$ în jurul unei axe de coordonate care nu taie pe $\Gamma_{f,g}$ este egal cu aria$(\Gamma_{f,g})$ înmulţită cu lungimea circumferinţei obţinută prin rotaţia centrului de greutate a lui $\Gamma_{f,g}$ în jurul axei de rotaţie.

Exemplul 5. Să se găsească centrul de greutate al plăcii plane omogene care se identifică cu porţiunea haşurată din plan cunoscând ecuaţiile celor două cercuri.

$$x^2+y^2=R^2;\ x^2+y^2=\left(\frac{R}{3}\right)^2.$$

Vom determina coordonatele centrului de greutate utilizând teorema lui Guldin. Volumul corpului obţinut rotind cercul mare de ecuaţie $x^2+(y-R)^2=R^2$ în jurul axei Ox este:

$$V_1=\pi\int_{-R}^{R}\left[\left(R+\sqrt{R^2-x^2}\right)^2-\left(R-\sqrt{R^2-x^2}\right)^2\right]dx=4\pi R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=8\pi R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=2\pi^2R^3.$$



Analog, volumul corpului obţinut prin rotaţia cercului mic de ecuaţie $x^2+\left(y-\frac{R}{3}\right)^2=\left(\frac{R}{3}\right)^2$ în jurul axei Ox este

$$V_2=\pi\int_{-\frac{R}{3}}^{\frac{R}{3}}\left[\left(\frac{R}{3}+\sqrt{\left(\frac{R}{3}\right)^2-x^2}\right)^2-\left(\frac{R}{3}-\sqrt{\left(\frac{R}{3}\right)^2-x^2}\right)^2\right]dx=\frac{2\pi^2R^3}{27}.$$

Volumul corpului obţinut prin rotaţia regiunii haşurate din plan în jurul axei Ox este:

$$V=V_1-V_2=2\pi^2R^3-\frac{2\pi^2R^3}{27}=\frac{52\pi^2R^3}{27}.$$

Aria porţiunii haşurate este: $A=A_1-A_2=\pi R^2-\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2=\frac{8\pi R^2}{9}$

Aplicând teorema lui Guldin, avem: $V=2\pi y_G\cdot$aria(A) rezultă: $\overline{y}_G=\dfrac{V}{2\pi\text{aria}(A)}=\dfrac{\frac{52\pi^2R^3}{27}}{\frac{8\pi R^2}{9}}=\dfrac{13R}{12}$.

Centrul de greutate este $G\left(0,\frac{13R}{12}\right)$.

Exemplul 6. Să se determine centrul de greutate al unei plăci plane omogene de forma unui triunghi.

De această dată vom determina coordonatele centrului de greutate utilizând teorema lui Guldin. Rotind ΔABC în jurul lui Ox se obţine un corp cu volumul $V=\frac{\pi a^2(b+c)}{3}$ în timp ce aria triunghiului este $S=\frac{a(b+c)}{2}$.

Conform teoremei lui Guldin rezultă $\overline{y}_G=\dfrac{V_{corp}}{2\pi S}=\dfrac{\pi a^2(b+c)}{3}\dfrac{1}{2\pi\frac{a(b+c)}{2}}=\dfrac{a}{3}$.

Rotind triunghiul ABC în jurul axei Oy şi aplicând teorema lui Guldin rezultă $\overline{x}_G=\frac{b+c}{3}\Rightarrow G\left(\frac{b+c}{3},\frac{a}{3}\right)$, ceea ce am arătat la exemplul 3.