

Clase de resturi

Tabla adunării și tabla înmulțirii în \mathbf{Z}_5 :

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

·	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Tabla înmulțirii în \mathbf{Z}_6 și tabla adunării în \mathbf{Z}_6 :

·	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$

Tabla adunării din \mathbf{Z}_8 :

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{6}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{7}$	$\hat{7}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$

Tabla înmulțirii în \mathbf{Z}_8 :

·	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{6}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{7}$	$\hat{2}$	$\hat{5}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{2}$	$\hat{7}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{6}$	$\hat{3}$
$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{7}$	$\hat{0}$	$\hat{7}$	$\hat{6}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Tabla înmulțirii în \mathbf{Z}_{11} :

·	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{8}$	$\widehat{10}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$	$\hat{9}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{6}$	$\hat{9}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$	$\widehat{10}$	$\hat{2}$	$\hat{5}$	$\hat{8}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$	$\hat{9}$	$\hat{2}$	$\hat{6}$	$\widehat{10}$	$\hat{3}$	$\hat{7}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\widehat{10}$	$\hat{4}$	$\hat{9}$	$\hat{3}$	$\hat{8}$	$\hat{2}$	$\hat{7}$	$\hat{1}$	$\hat{6}$
$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	$\hat{1}$	$\hat{7}$	$\hat{2}$	$\hat{8}$	$\hat{3}$	$\hat{9}$	$\hat{4}$	$\widehat{10}$	$\hat{5}$
$\hat{7}$	$\hat{0}$	$\hat{7}$	$\hat{3}$	$\widehat{10}$	$\hat{6}$	$\hat{2}$	$\hat{9}$	$\hat{5}$	$\hat{1}$	$\hat{8}$	$\hat{4}$
$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	$\hat{5}$	$\hat{2}$	$\widehat{10}$	$\hat{7}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{9}$	$\hat{6}$	$\hat{3}$
$\hat{9}$	$\hat{0}$	$\hat{9}$	$\hat{7}$	$\hat{5}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\widehat{10}$	$\hat{8}$	$\hat{6}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\widehat{10}$	$\hat{0}$	$\widehat{10}$	$\hat{9}$	$\hat{8}$	$\hat{7}$	$\hat{6}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Probleme propuse bacalaureat 2007

1. Determinați inversul lui $\hat{3}$ în \mathbf{Z}_{11} în raport cu operația de înmulțire.
2. a) Determinați simetricul lui $\hat{7}$ în \mathbf{Z}_8 în raport cu operația de adunare.
b) Calculați suma $S = \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7}$ în \mathbf{Z}_8 .
3. Calculați produsul $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} \cdot \hat{5} \cdot \hat{6} \cdot \hat{7}$ în \mathbf{Z}_8 .
4. Calculați suma elementelor din \mathbf{Z}_{14} .
5. Determinați $\hat{y} \in \mathbf{Z}_6$ astfel încât $\hat{3} \cdot \hat{y} = \hat{3}$.
6. Determinați $\hat{x} \in \mathbf{Z}_9$ astfel încât $\hat{x} \cdot \hat{5} = \hat{1}$.
7. Determinați $\hat{x} \in \mathbf{Z}_8$ astfel încât $\hat{x} + \hat{3} = \hat{0}$.
8. Calculați produsul elementelor inversabile față de înmulțire în \mathbf{Z}_5 .
9. Calculați $\hat{2}^{2007}$ în \mathbf{Z}_{12} .
10. Calculați $\hat{4}^{2007}$ în \mathbf{Z}_8 .
11. Rezolvați în \mathbf{Z}_5 ecuația $\hat{2} \cdot \hat{x} + \hat{4} = \hat{3}$.
12. Rezolvați în \mathbf{Z}_6 ecuația $\hat{4} \cdot \hat{x} + \hat{2} = \hat{4}$.
13. Rezolvați în \mathbf{Z}_8 ecuația $\hat{2} \cdot \hat{x} = \hat{4}$.
14. Calculați probabilitatea că un element din \mathbf{Z}_6 să verifice relația $\hat{3} \cdot \hat{x} = \hat{0}$.

Probleme propuse bacalaureat 2008

1. Se consideră inelul $(\mathbf{Z}_6, +, \cdot)$, unde $\mathbf{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$
 - a) Să se rezolve ecuația $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1}$, $x \in \mathbf{Z}_6$.
 - b) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ în \mathbf{Z}_6 .
 - c) Să se rezolve în \mathbf{Z}_6 sistemul de ecuații $\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{4} \\ x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$.
2. Se consideră $(\mathbf{Z}_8, +, \cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8.
 - a) Să se calculeze în \mathbf{Z}_8 suma $S = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7}$.
 - b) Să se calculeze în \mathbf{Z}_8 produsul elementelor inversabile ale inelului.
 - c) Să se rezolve în \mathbf{Z}_8 sistemul $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{5}y = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$.
3. Se consideră inelul $(\mathbf{Z}_6, +, \cdot)$.

a) Să se calculeze numărul elementelor inversabile în raport cu înmulțirea din inelul $(\mathbf{Z}_6, +, \cdot)$.

b) Se consideră S suma soluțiilor ecuației $\hat{2}x + \hat{1} = \hat{5}$ și P produsul soluțiilor ecuației $x^2 = x$, unde $x \in \mathbf{Z}_6$. Să se calculeze $S + P$.

c) Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din inelul $(\mathbf{Z}_6, +, \cdot)$, acesta să fie soluție a ecuației $x^3 = \hat{0}$.

4. În mulțimea $M_3(\mathbf{Z}_8)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{5} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{7} & \hat{5} \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$

Se notează $X^2 = X \cdot X$, pentru $\forall X \in M_3(\mathbf{Z}_8)$.

a) Să se arate că $A^2 = I_3$.

b) Să se rezolve ecuația matricială $A \cdot X = I_3$, unde $X \in M_3(\mathbf{Z}_8)$.

c) Să se calculeze $(B - A)^2$.

Rezolvări probleme bacalaureat 2007

1. Determinați inversul lui $\hat{3}$ în \mathbf{Z}_{11} în raport cu operația de înmulțire.

R. Din tabla înmulțirii în $\mathbf{Z}_{11} \Rightarrow \hat{3} \cdot \hat{4} = \hat{1}$ și atunci $\hat{3}^{-1} = \hat{4}$

2. a) Determinați simetricul lui $\hat{7}$ în \mathbf{Z}_8 în raport cu operația de adunare.

b) Calculați suma $S = \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7}$ în \mathbf{Z}_8 .

R. a) Din tabla adunării în $\mathbf{Z}_8 \Rightarrow \hat{7} + \hat{1} = \hat{0}$ și atunci $-\hat{7} = \hat{1}$

b) $\hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} = \hat{7} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} = \hat{4} + \hat{6} + \hat{7} = \hat{2} + \hat{7} = \hat{1}$

3. Calculați produsul $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} \cdot \hat{5} \cdot \hat{6} \cdot \hat{7}$ în \mathbf{Z}_8 .

R. Ținând cont că înmulțirea este comutativă, calculăm $\hat{2} \cdot \hat{4} = \hat{0}$ și atunci produsul este $\hat{0}$

4. Calculați suma elementelor din \mathbf{Z}_{14} .

R. $\hat{0} + \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} + \hat{9} + \hat{10} + \hat{11} + \hat{12} + \hat{13} =$
 $= (\hat{1} + \hat{13}) + (\hat{2} + \hat{12}) + (\hat{3} + \hat{11}) + (\hat{4} + \hat{10}) + (\hat{5} + \hat{9}) + (\hat{6} + \hat{8}) + \hat{7} = \hat{7}$
 $\quad \quad \quad = \hat{0} \quad \quad \quad = \hat{0} \quad \quad \quad = \hat{0} \quad \quad \quad = \hat{0} \quad \quad \quad = \hat{0} \quad \quad \quad = \hat{0}$

5. Determinați $\hat{y} \in \mathbf{Z}_6$ astfel încât $\hat{3} \cdot \hat{y} = \hat{3}$.

R. $\hat{3} \cdot \hat{1} = \hat{3}$, $\hat{3} \cdot \hat{2} = \hat{0}$, $\hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{3}$, $\hat{3} \cdot \hat{4} = \hat{0}$, $\hat{3} \cdot \hat{5} = \hat{3}$ și atunci $\hat{y} \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}$.

6. Determinați $\hat{x} \in \mathbf{Z}_9$, astfel încât $\hat{x} \cdot \hat{5} = \hat{1}$.

$$\mathbf{R.} \frac{\begin{array}{cccccccc} \cdot & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{4} & \hat{5} & \hat{6} & \hat{7} & \hat{8} \\ \hat{5} | & \hat{0} & \hat{5} & \hat{1} & \hat{6} & \hat{2} & \hat{7} & \hat{3} & \hat{8} & \hat{4} \end{array}}{\hat{5}} \Rightarrow \hat{x} = \hat{2}$$

7. Determinați $\hat{x} \in \mathbf{Z}_8$ astfel încât $\hat{x} + \hat{3} = \hat{0}$.

$$\mathbf{R.} \frac{\begin{array}{cccccccc} + & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{4} & \hat{5} & \hat{6} & \hat{7} \\ \hat{3} | & \hat{3} & \hat{4} & \hat{5} & \hat{6} & \hat{7} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \end{array}}{\hat{3}} \Rightarrow \hat{x} = \hat{5}$$

8. Calculați produsul elementelor inversabile față de înmulțire în \mathbf{Z}_5 .

$$\mathbf{R.} \text{Elementele inversabile sunt: } \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4} \text{ și produsul lor } \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} \underset{\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{1}}{=} \hat{4}$$

9. Calculați $\hat{2}^{2007}$ în \mathbf{Z}_{12} .

$$\mathbf{R.} \hat{2}^2 = \hat{4}, \hat{2}^3 = \hat{8}, \hat{2}^4 = \hat{4}, \hat{2}^5 = \hat{8}, \hat{2}^6 = \hat{4} \text{ și se repetă aceleași valori, atunci } 2007 = 1003 \cdot 2 + 1 \text{ și}$$

$$\hat{2}^{2007} = \hat{4}.$$

10. Calculați $\hat{4}^{2007}$ în \mathbf{Z}_8 .

$$\mathbf{R.} \hat{4}^1 = \hat{4}, \hat{4}^2 = \hat{0}, \hat{4}^3 = \hat{4}^2 \cdot \hat{4} = \hat{0} \cdot \hat{4} = \hat{0}, \dots, \hat{4}^{2007} = \hat{0}$$

11. Rezolvați în \mathbf{Z}_5 ecuația $\hat{2} \cdot \hat{x} + \hat{4} = \hat{3}$.

$$\mathbf{R.} \hat{2} \cdot \hat{x} + \hat{4} = \hat{3} \mid + \hat{1} \Rightarrow \hat{2} \cdot \hat{x} = \hat{4} \Rightarrow \hat{x} = \hat{2}$$

12. Rezolvați în \mathbf{Z}_6 ecuația $\hat{4} \cdot \hat{x} + \hat{2} = \hat{4}$.

$$\mathbf{R.} \hat{4} \cdot \hat{x} + \hat{2} = \hat{4} \mid + \hat{4} \Rightarrow \hat{4} \cdot \hat{x} = \hat{2} \Rightarrow \hat{x} \in \{\hat{2}, \hat{5}\}$$

13. Rezolvați în \mathbf{Z}_8 ecuația $\hat{2} \cdot \hat{x} = \hat{4}$.

$$\mathbf{R.} \frac{\begin{array}{cccccccc} \cdot & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{4} & \hat{5} & \hat{6} & \hat{7} \\ \hat{4} | & \hat{0} & \hat{4} & \hat{0} & \hat{4} & \hat{0} & \hat{4} & \hat{0} & \hat{4} \end{array}}{\hat{4}} \Rightarrow \hat{x} = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\}$$

14. Calculați probabilitatea că un element din \mathbf{Z}_6 să verifice relația $\hat{3} \cdot \hat{x} = \hat{0}$.

$$\mathbf{R.} \frac{\begin{array}{cccccc} \cdot & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{4} & \hat{5} \\ \hat{3} | & \hat{0} & \hat{3} & \hat{0} & \hat{3} & \hat{0} & \hat{3} \end{array}}{\hat{3}} \Rightarrow \hat{x} = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$$