DRUMURI, ARCE ŞI LUNGIMILE LOR

Funcţiile cu variaţie mărginită au fost introduse de Jordan Camille (1838-1922) şi utilizate de el cu ocazia studiului problemei rectificabilităţii curbelor, adică a studiului condiţilor în care se poate ataşa unei curbe un număr pozitiv care să joace rolul unei lungimi. Vom face referiri la drumuri în spaţiul plan euclidian.

Definiţie 1. Orice funcţie $f: [a,b] \to \mathbf{R}^2$, continuă pe $[a,b]$, $a,b \in \mathbf{R}$, $a<b$ se numeşte <u>drum</u> în $\mathbf{R}^2$, iar mulţimea $f([a,b])$ se numeşte <u>urma drumului</u>.

Dacă $f: [a,b] \to \mathbf{R}^2$ este un drum în spaţiul $\mathbf{R}^2$, atunci punctele $f(a)$ şi $f(b)$ se numesc capetele drumului. Un drum a cărui capete coincid, se numeşte drum închis, iar un drum a cărui capete sunt distincte, se numeşte ne-închis.

Un drum $f: [a,b] \to \mathbf{R}^2$ se numeşte simplu dacă nu există nici o pereche de puncte $t', t'' \in [a,b]$ astfel încât:

$0<t''-t'<b-a$ şi $f(t')=f(t'')$.

Se constată că:

a) un drum închis $f: [a,b] \to \mathbf{R}^2$ este simplu dacă şi numai dacă funcţia $f|_{[a,b]}$ este injectivă;

b) un drum neînchis $f: [a,b] \to \mathbf{R}^2$ este simplu dacă şi numai dacă funcţia f este injectivă

Dacă $f_1: [a_1,b_1] \to \mathbf{R}^2$ şi $f_2: [a_2,b_2] \to \mathbf{R}^2$ sunt drumuri în $\mathbf{R}^2$ astfel ca $f_1(b_1)=f_2(a_2)$, atunci funcţia:

$f_1 \cup f_2: [a_1, b_1+(b_2-a_2)] \to \mathbf{R}^2$ definită prin:

$$(f_1 \cup f_2)(t) = \begin{cases} f_1(t) \ daca \ t \in [a_1, b_1] \\ f_2(t) \ daca \ t \in (b_1, b_1+(b_2-a_2)) \end{cases}$$

este un drum în $\mathbf{R}^2$, care se numeşte <u>reuniunea</u> drumului f_1 cu drumul f_2. Urma acestui drum este reuniunea urmelor lui f_1 şi f_2.

Inductiv se poate defini reuniunea $f_1 \cup ... \cup f_k$ a k drumuri $f_1: [a_1,b_1] \to \mathbf{R}^2, ..., f_k: [a_k,b_k] \to \mathbf{R}^2$, (unde $k \in \mathbf{N}^*$, $k \geq 2$) dacă acestea se bucură de proprietatea:

$f_j(b_j)=f_{j+1}(a_{j+1})$, $(\forall) j \in \{1,...,k-1\}$.

Definiţie 2. Un drum se numeşte <u>poligonal</u> dacă există o diviziune $\Delta=(t_0,t_1,...,t_k)$ a intervalului $[a,b]$ astfel încât $f_1 \cup ... \cup f_k = f$, unde $f_j: [t_{j-1}, t_j] \to \mathbf{R}^2$, ($j \in \{1,...,k\}$ este definit prin:

$$f_j(t) = \left(1 - \frac{t-t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right) f(t_{j-1}) + \frac{t-t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} f(t_j)$$

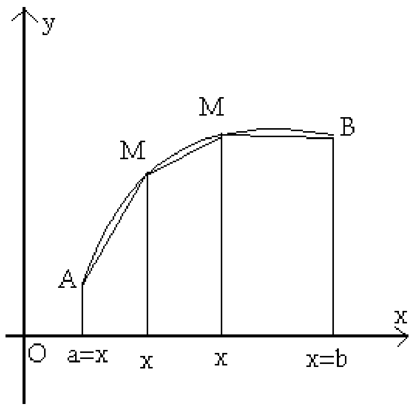
pentru orice $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Urma unui drum poligonal se numeşte linie poligonală.

<u>Exemplu:</u> Dacă drumul este dat în coordonate parametrice, sistemul simultan

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \text{ cu } t \in [0, \pi], \quad a>0$$

are drept imagine grafică mulțimea punctelor unui cerc cu centrul în origine şi de rază 1. Sistemul acesta împreună cu imaginea sa grafică reprezintă un drum.

Teorema 3. Fie f: $[a, b]\to\mathbf{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă pe $[a, b]$. Notăm $C=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2/a\le x\le b; y=f(x)\}$.



Lungimea curbei C definită ca marginea superioară a mulțimii perimetrilor "p" ale tuturor liniilor înscrise în curbă $S=\sup\{p\}$ este dată de

$$l(C)=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx\ .$$

Demonstrație: Fie $\Delta=(x_0,x_1,...,x_n)$ cu $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Prin punctele x_i, $i\in\{1, ..., n\}$ ducem paralele la Oy obținînd punctele M_i ($i\in\{1, ..., n\}$) de pe curbă. Din figură se vede că

$d(M_{i-1},M_i)=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}$. Aplicând formula creşterilor finite pe $[x_{i-1}, x_i]$ pentru f, avem: $f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$, $\xi\in[x_{i-1}, x_i]$.

Rezultă $d(M_{i-1},M_i)==\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\cdot(x_i-x_{i-1})$. Notând suma segmentelor $[M_{i-1}, M_i]$ cu P (linie poligonală), avem: $l(P)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\cdot(x_i-x_{i-1})$. Considerăm acum un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şi calculând lungimea liniei poligonale prin procedeul de mai sus pentru fiecare diviziune Δ_n, vom avea:

$$l(P_n)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i^{\,n})]^2}\cdot(x_i^n-x_{i-1}^n).$$

Trecând la limită, avem:

$$\lim_{n\to\infty}l(P_n)=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$$

Se observă că pe măsură ce n creşte, linia poligonală P se apropie de curba C, de aceea prin definiție se ia:

$$l(C)=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx.$$

Mai trebuie să arătăm că graficul funcției f: $[a, b]\to\mathbf{R}$, derivabilă şi cu derivata continuă pe $[a, b]$ are lungime finită, adică există un număr $M^*\ge0$ astfel încât:

$$l(P)=\sum_{i=1}^{n}d(M_{i-1},M_i)<M^*.$$

Din ipoteză f' este continuă pe $[a, b]$ rezultă $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ este continuă pe $[a, b]$, deci mărginită, adică există un număr $M\ge0$ astfel încât $\sqrt{1+[f'(x)]^2}\le M$, $(\forall)x\in[a, b]$.

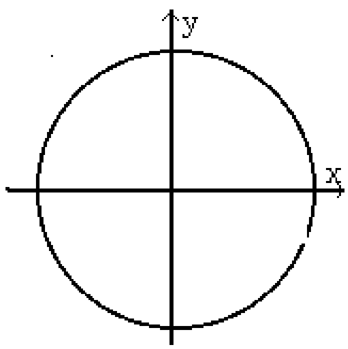
Atunci:

$$l(P)=\sum_{i=1}^{n} d(M_{i-1},M_i)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\cdot(x_i-x_{i-1})\le M\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=M(b-a)=M^*.$$

Lungimea elementului de arc este dată de $ds^2=dx^2+dy^2$.

Exemplul 1. Să se calculeze lungimea cercului de ecuație (C): $x^2+y^2=R^2$.



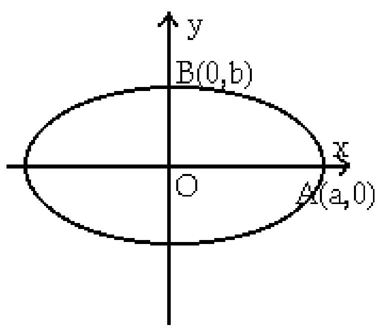
Rezultă $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in[-R,R]$.

$$l(C)=4l_{AB}=4\int_0^R\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=$$

$$=4\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=4R\text{arctg}\frac{x}{R}\Big|_0^R=2\pi R$$

Deci $l(C)=2\pi R$.

Exemplul 2. Să se calculeze lungimea elipsei de ecuație (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$.



Rezultă $x=a\cos t$; $y=b\sin t$; $t\in[0,2\pi]$.

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,dt$$

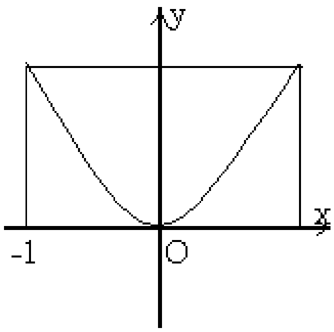
$dt=a\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt=a\sqrt{(1-e^2\cos^2 t)}dt$, unde $e<1$ este excentricitatea elipsei. Lungimea elipsei este dată de:

$$l(E)=4a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt.$$

Folosind dezvoltarea în serie $l(E)=4a\int_0^{2\pi}\left[1+\frac{1}{2}e^2\cos^2 t-\frac{1}{2^2\cdot 2!}e^4\cos^4 t+...\right]dt$ și din formula lui Wallis, $\left(\frac{\pi}{2}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\right)$, rezultă:

$$l(E)=2\pi a\left[1+\frac{1}{2^2}e^2+\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}e^4-\frac{1^2 3^2...(2n-3)^2(2n-1)^2}{2^2 4^2...(2n)^2}e^{2n}...\right]$$

Exemplul 3. Să se calculeze lungimea graficului funcției $f(x)=x^2$; $x\in[-1,1]$.

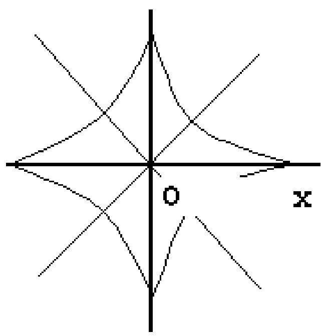


Datorită simetriei față de Oy este suficient să calculăm lungimea graficului restricției f_0 a lui f la `[0,1]`. Avem:

$$l(f) = 2l(f_0) = 2\int_0^1 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = 2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5}).$$

Exemplul 4. Să se calculeze lungimea astroidei de ecuație $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$.



Prima bisectoare $y=x$ intersectează astroida în punctul $M(2^{-\frac{3}{2}}a, 2^{-\frac{3}{2}}a)$. Datorită simetriei avem egalitățiile: $l_{AM} = \frac{1}{2} l_{AMB} = \frac{1}{8} l_{astroidei}$.

Deci, este suficient să calculăm lungimea graficului funcției

$$f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}};\ x \in \left[2^{-\frac{3}{2}}a, a\right]$$

Derivând funcția f, obținem;

$$f'(x) = \frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \frac{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2}} = \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$l(f) = \int_{2^{-\frac{3}{2}}a}^{a} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = a^{\frac{1}{3}} \int_{2^{-\frac{3}{2}}a}^{a} x^{-\frac{1}{3}}\,dx = a^{\frac{1}{3}} \left.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_{2^{-\frac{3}{2}}a}^{a} = \frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}\left[a^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{a}{2^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{3}{4}a$$

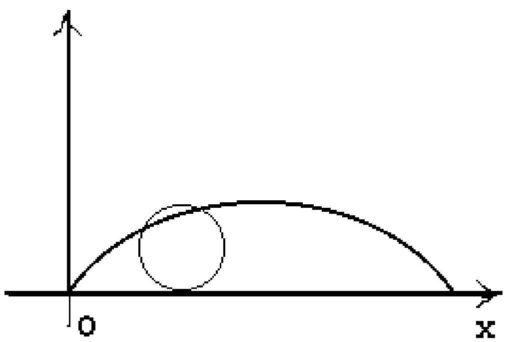
Deci lungimea astroidei este $8 \cdot l(f) = 6a$.

Exemplul 5. Lungimea cicloidei. Cicloida este dată în coordonate polare de sistemul:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi].$$

Cicloida este locul geometric descris de un punct de pe un cerc de rază dată a care se rostogoleşte fără alunecare pe o dreaptă.

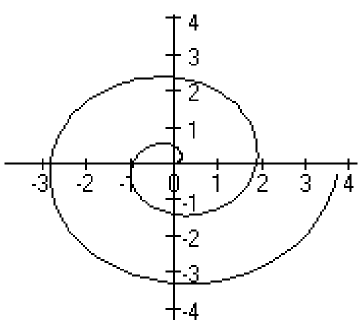
Lungimea unei bucle de cicloidă este dată de:



$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\,dt =$$
$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = 2a \int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt =$$
$$= 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 6a.$$

Spirale. Se numesc spirale curbele ale căror raze vectoare sunt funcții univoce de unghiul φ, $r=f(\varphi)$, unde φ variază între 0 sau -∞ şi +∞, iar $r(\varphi)$ poate fi diferit de $r(\varphi+2\pi)$. De exemplu $r=a\varphi$ sau $r=ae^{k\varphi}$.

Exemplul 6. Să se calculeze lungimea spiralei lui Arhimede. În coordonate polare această spirală are ecuația $r=a\varphi$. Distanța dintre punctele $P_1, P_2, \ldots$ care se găsesc pe aceeaşi rază este constantă şi egală cu $2\pi a$ deoarece $r_2=a(\varphi+2\pi)=a\varphi+2\pi a=r_1+2\pi a$. Elementul de arc ds are valoarea



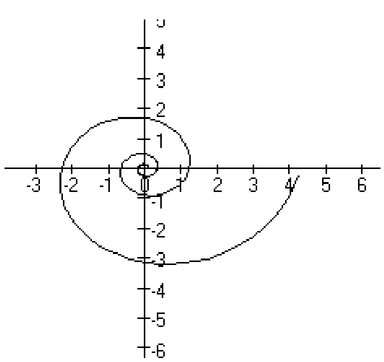
$$ds = a\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi;$$

lungimea arcului va fi:

$$s = a\int_0^{\varphi_1} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \frac{a}{2}\left[\varphi_1\sqrt{1+\varphi_1^2} + \ln\left(\varphi_1 + \sqrt{1+\varphi_1^2}\right)\right].$$

Pentru valori mari ale lui φ_1 rezultă $s \approx \frac{a}{2}\varphi_1^2$.

Exemplul 7. Să se calculeze lungimea spiralei logaritmice. În coordonate polare această spirală are ecuția $r=ae^{k\varphi}$, $k>0$. Pentru valori negative lae lui φ curba se înfăşoară tot mai strâns, cu raza vectoare descrescătoare, în jurul polului O. Lungimea arcului s se poate calcula astfel:



$$ds = \sqrt{r^2 + r^2k^2}\,d\varphi = r\sqrt{1+k^2}\,d\varphi = \frac{1}{k}\sqrt{1+k^2}\,dr,$$ r, raza de curbură. $s = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{k}\sqrt{1+k^2}\,dr = \frac{1}{k}\sqrt{1+k^2}\left(r_2 - r_1\right)$.