Exercițiul 1. Să se arate că $e^2(e-1) < \int_e^{e^2} \frac{x}{\ln x}dx < \frac{e^3}{2}(e-1)$

Soluție: Fie $f: [e, e^2] \to \mathbf{R}$ funcția definită prin:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x};\ \ (\forall)x \in [e, e^2].$$

Evident funcția f este derivabilă şi

$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0; (\forall)x \in (e, e^2]$, rezultă f este strict crescătoare. Prin urmare $f(e)<f(x)<f(e^2)$, $(\forall)x\in(e,e^2)$. Dar $f(e)=e$ şi

$$f(e^2) = \frac{e^2}{2} \Rightarrow e < \frac{x}{\ln x} < \frac{e^2}{2};\ (\forall)x \in (e, e^2) \Rightarrow \int_e^{e^2} e dx < \int_e^{e^2} \frac{x}{\ln x}dx < \int_e^{e^2} \frac{e^2}{2}dx$$

$$\int_e^{e^2} e dx = ex\Big|_e^{e^2} = e(e^2 - e) = e^2(e-1);$$

$$\int_e^{e^2} \frac{e^2}{2}dx = \frac{e^2}{2}x\Bigg|_e^{e^2} = \frac{e^4}{2} - \frac{e^3}{2} = \frac{e^3}{2}(e-1) \Rightarrow e^2(e-1) < \int_e^{e^2} \frac{x}{\ln x}dx < \frac{e^3}{2}(e-1)\ .$$

Exercițiul 2. Să se arate că:

$a)\ \ 2\sqrt{2} < \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + 4x + 5}dx < 2\sqrt{10};$

$b)\ \ \sqrt{3} < \int_2^5 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx < \sqrt{6};$

$c)\ \ 0 < \int_{-2}^{-1} \frac{(x+2)^3}{x^2 + x + 1}dx < 1;$

$d)\ \ 9 < \int_2^7 \frac{1+x^3}{1+x^2}dx < 35;$

$e)\ \ \ln\frac{3}{4} < \int_0^1 \ln(x^2 - x + 1)dx < 0;$

$f)\ \ e < \int_1^2 e^{x^2}dx < e^4;$

$g)\ \ \frac{2}{\sqrt[4]{e}} \le \int_0^2 e^{x^2 - x}dx < 2e^2;$

$h)\ \ \frac{\pi\sqrt{2}}{8} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - 2x^2 - x^3}}dx < \frac{\pi\sqrt{3}}{9};$

$i)\ \ 2\sqrt{3}\ln(4-\pi) \le \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \ln(4\mathrm{arctg}x - 2x + 2)dx < 2\sqrt{3}\ln\pi;$

$j)\ \ \frac{3}{4} < \int_0^1 e^{x^2}dx < \frac{e+3}{3};$

$k)\ \ 2\sqrt{e} \le \int_0^1 e^{x^2}dx + \int_0^1 e^{1-x^2}dx \le 1 + e$

Exercițiul 3. Fie $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx; n \in N^*$.

a) Să se arate că şirul (I_n) este monoton şi mărginit;

b) Să se găsească o formulă de recuren]ă între I_n şi I_{n-1}, $n\in\mathbf{N}$, $n\ge2$;

c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Soluție:

a) $I_n = \int_1^e \ln^n x dx;\ \ I_{n+1} = \int_1^e \ln^{n+1} x dx$

$(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ avem: $I_{n+1} - I_n = \int_1^e \ln^n x(\ln x - 1)dx$

Cum $x \in [1, e]$ obținem $\ln x \in [0, 1]$ şi deci $I_{n+1} \leq I_n$, rezultă şirul (I_n) este descrescător.

Deoarece $0 \leq \ln x \leq 1$; $(\forall) x \in [1, e]$, rezultă $0 \leq I_n \leq e-1$; $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, şirul (I_n) este mărginit.

b) $I_n = \int_1^e \ln^n x dx = \int_1^e (x)' \ln^n x dx = x \ln x\Big|_1^e - n\int_1^e \ln^{n-1} x dx = e - nI_{n-1}$;

$(\forall) n \in \mathrm{N}; n \geq 2$.

c) Şirul (I_n) fiind monoton şi mărginit, este convergent. Fie $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$;

$I \in [0, e-1]$. Din relația de recurență $I_n = e - nI_{n-1}; n \geq 2$ rezultă

$I_{n+1} = e - (n+1)I_n \,|:(n+1)$

$\frac{I_{n+1}}{n+1} = \frac{e}{n+1} - I_n$; $(\forall) n \geq 1$; prin trecere la limită rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{n+1} - I_n\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

<u>Exercițiul 4.</u> Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, unde $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n)dx; n \in \mathrm{N}^*$.

a) Arătați că şirul (I_n) este monoton şi mărginit;

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

<u>Exercițiul 5.</u> Să se arate că dacă pentru funcția continuă $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ există un număr natural $n \geq 2$ astfel încât:

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

atunci există $c \in (0,1)$ astfel încât $f(c) = \frac{1-c^n}{1-c}$.

<u>Exercițiul 6.</u> Fie $a>0$ şi $f: [0, a] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă şi crescătoare. Să se arate că pentru orice $b \in (0,a)$ avem:

$$a\int_0^b f(x)dx \leq b\int_0^a f(x)dx.$$

Soluție: Deoarece $\int_0^a f(x)dx = \int_0^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx$ rezultă că inegalitatea din concluzia problemei are loc dacă şi numai dacă:

$(a-b)\int_0^b f(x)dx \leq b\int_a^b f(x)dx$. Conform teoremei de medie există $c_1 \in (0, b]$ şi $c_2 \in [b, a]$ astfel încât:

$$\int_0^b f(x)dx = bf(c_1) \;\; si \;\; \int_a^b f(x)dx = (a-b)f(c_2).$$

Cum $0 \leq c_1 \leq b \leq c_2 \leq a$ rezultă $f(c_1) \leq f(c_2) \Rightarrow b \cdot (a-b) \cdot f(c_1) \leq b \cdot (a-b) \cdot f(c_2) \Rightarrow$

$$b(a-b)\frac{\int_0^b f(x)dx}{b} \le b(a-b)\frac{\int_b^a f(x)dx}{a-b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\int_0^b f(x)dx - b\int_0^b f(x)dx \le b\int_b^a f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\int_0^b f(x)dx \le b\left(\int_0^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\int_0^b f(x)dx \le b\int_0^a f(x)dx.$$

<u>Exercițiul 7.</u> Fie $a,b\in\mathbf{R}$ cu $a<b$ și $f\colon [a,b]\to\mathbf{R}$ o funcție continuă. Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât:

$$f(c) = \frac{a+b-2c}{(c-a)(c-b)}.$$

Soluție: În baza teoremei de existență a primitivelor unei funcții continue, funcția $F\colon [a,b]\to\mathbf{R}$ definită prin:

$F(x) = \int_a^x f(t)dt; (\forall)x \in [a,b]$ este o primitivă a funcției f pe $[a,b]$, rezultă F este derivabilă pe $[a,b]$ și $F'(x)=f(x)$; $(\forall)x\in[a,b]$. Atunci funcția $g\colon [a,b]\to\mathbf{R}$ definită prin $g(x)=(x-a)(x-b)e^{F(x)}$; $(\forall)x\in[a,b]$ este continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) și rezultă

$g'(x)=(x-b)e^{F(x)}+(x-a)e^{F(x)}+(x-a)(x-b)F'(x)e^{F(x)}=$
$=[2x-a-b+(x-a)(x-b)f(x)]e^{F(x)}$; $(\forall)x\in(a,b)$.

Deoarece $g(a)=g(b)=0$ atunci conform teoremei lui Rolle $(\exists)c\in(a,b)$ astfel încât $g'(c)=0$. Deoarece $e^{F(c)}\neq 0$, deducem că $2c-a-b+(c-a)(c-b)f(c)=0$, rezultă

$$f(c) = \frac{a+b-2c}{(c-a)(c-b)}.$$

<u>Exercițiul 8.</u> Să se determine toate funcțiile continue $f\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ cu proprietatea că $f(x)>0$, $(\forall)x\in(0,+\infty)$ și care verifică relația:

$$x^2\int_o^x f(t)dt = f(x); (\forall)x \in [0,+\infty).$$

Soluție: Presupunem că există o funcție continuă f care satisface cerințele problemei. Atunci, în baza teoremei de existență a primitivelor, funcția $F\colon [0,+\infty)\to\mathbf{R}$ definită prin $F(x) = \int_0^x f(t)dt; (\forall)x \in [0,+\infty)$ este derivabilă pe $[0,+\infty)$, rezultă f este derivabilă pe $[0,+\infty)$. Derivând egalitatea dată în problemă, obținem că:

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^3+2}{x}; (\forall)x \in (0,+\infty)$, iar prin integrare rezultă

$$\ln f(x) = \frac{x^3}{3} + 2\ln x + c; (\forall)x[0,+\infty).$$

Prin urmare funcția f are forma:

$$f(x) = cx^2 + e^{\frac{x^3}{3}};(\forall) \in [0,+\infty); c \in (0,+\infty).$$

Exercițiul 9. Să se determine funcțiile derivabile f: $[0,+\infty] \to \mathbf{R}$ care au proprietatea că:

$$x + \int_0^x f(t)dt = (x+1)f(x);(\forall)x>0.$$

Exercițiul 10. Să se determine toate funcțiile continue f: $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ cu proprietatea că $f(x)>0$; $(\forall)x\in(0,+\infty)$ și care verifică egalitatea

$$3\int_0^x f(t)dt = 2xf(x);\ (\forall)x\in[0,+\infty).$$

Exercițiul 11. Să Se determine funcțiile derivabile f:$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care satisfac egalitatea:

$$e^x f(x) - \int_o^x e^t f(t)dt = 2x^2;(\forall)x\in\mathbf{R}.$$

Exercițiul 12. Să se determine toate funcțiile continue f: $[0,+\infty) \to (0,\frac{\pi}{2})$ care satisfac relația:

$$\int_0^x \mathrm{tg} f(x)dx = \int_0^x \mathrm{ctg} f(x)dx;\ (\forall)x\in[0,+\infty).$$

Exercițiul 13. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 [nx]dx$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

Soluție: Fie $n\in\mathbf{N}^*$. Atunci $(\forall)k\in\mathbf{N}$, $k\le n-1$ și $(\forall)x\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$, avem $[nx]=k$. De aici deducem că:

$$\int_0^1 [nx]dx = \int_0^{\frac{1}{n}} 0dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} dx + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} 2dx + .. + \int_{\frac{n-1}{n}}^{n} (n-1)dx =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + .. + \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}(1 + .. + n-1) = \frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 [nx]dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{n-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercițiul 14. Fie $p\in\mathbf{N}$, $p\ge 2$. Să se calculeze

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{p^n}\int_0^1 [p^n x]dx.$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

Exercițiul 15. Fie $p,q\in\mathbf{N}$; $p,q\ge 2$. Să se calculeze:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 [p^n x]dx}{\int_0^1 [q^n x]dx}$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

Exercițiul 16. Să se calculeze:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\int\limits_0^1 [nx]e^x dx$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

Exercițiul 17. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^{x^2} e^{t^2}dt}{\sin^2 x}$.

Soluție: Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $f(t)=e^{t^2}$,$(\forall)t\in\mathbf{R}$; f fiind continuă, admite primitive. Fie $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o primitivă a funcției f. Atunci F este derivabilă şi $F'(t)=e^{t^2}$, $(\forall)t\in\mathbf{R}$. Pe de altă parte, din continuitatea funcției f deducem că ea este integrabilă pe $[0,x^2]$;$(\forall)x\in\mathbf{R}$. Atunci, în baza formulei lui Leibnitz-Newton, avem:

$\int\limits_0^{x^2} e^{t^2}dt = F(x^2)-F(0)$;$(\forall)x\in\mathbf{R}$. Deoarece F este continuă, $\lim\limits_{x\to 0}F(x^2)=F(0)$.

Cum $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x = 0$ se obține o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Observăm că sunt îndeplinite ipotezele teoremei lui l'Hospital, rezultă:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{x^2} e^{t^2}dt}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{F(x^2)-F(0)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{[F(x^2)-F(0)]'}{(\sin^2 x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xF'(x^2)}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x^4}}{\sin x\cos x}=1.$$

Exercițiul 18. Să se calculeze:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x \sin t^2 dt}{x^2}$; $b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x}$;

$c)\ \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\int\limits_0^x (1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}dt\right]$; $d)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int\limits_0^x (\text{arctg}t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$;

$e)\ \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x} e^{t^2}dt}{\int\limits_0^{\text{tg}x} e^{t^2}dt}$; $f)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\int\limits_0^{\text{tg}x} e^{t^2}dt}{\int\limits_0^{\text{ctg}x} e^{t^2}dt}$;

$g)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{x^2}\int\limits_0^x \dfrac{t^4}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt\right]$; $h)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{\ln x}\int\limits_1^x \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt\right]$;

$i)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^{\frac{1}{2}}}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$; $j)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\int_0^{\frac{1}{x}} e^t\sin t dt\right)$;

$k)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x t^{1+t}dt$; $l)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

$m)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\int_0^x\dfrac{t+10}{t+1}dt\right)$; $n)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\mathrm{tg}t}dt}{\int_0^{\mathrm{tg}x}\sqrt{\sin t}dt}$;

$o)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\int_0^x t\sin^2 t dt\right)$; $p)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\int_0^x\sqrt{t}\sin t dt\right)$.

Exerciţiul 19. Fie f: $[1,2]\to\mathbf{R}$ funcţia definită prin $f(x)=x^3$; $(\forall)x\in[1,2]$.

Să se calculeze aria mulţimii din plan delimitate de graficul funcţiei f, dreptele de ecuaţii $x=1$; $x=2$ şi axa Ox.

Soluţie: Funcţia f fiind continuă şi pozitivă rezultă multimea Γ_f delimitată de graficul funcţiei f, dreptele de ecuaţii $x=1$; $x=2$, axa Ox are arie şi:

$$\text{aria}(\Gamma_f)=\int_1^2 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2=\frac{15}{4}.$$

Exerciţiul 20. Să se calculeze aria mulţimii din plan delimitate de curba $y=\dfrac{x^2-8x}{x+1}$; dreptele $x=8$, $x=9$ şi axa Ox.

Exerciţiul 21. Să se calculeze aria mulţimii din plan delimitate de curba $y=x^2\mathrm{arctg}x$; dreptele $x=0$, $x=1$ şi axa Ox.

Exerciţiul 22. Să se calculeze aria mulţimii din plan delimitate de curba $y=\sqrt{x^2+2|x|}$, dreptele $x=0$, $x=1$ şi axa Ox.

Exerciţiul 23. Să se calculeze aria mulţimii din plan delimitate de curba $y=(x+1)\ln x$, dreptele $x=1$, $x=3$ şi axa Ox.

Exerciţiul 24. Să se calculeze aria mulţimii din plan delimitate de curba $y=\sin x|\ln\cos x|$, dreptele $x=0$, $x=\pi/4$ şi axa Ox.

Exerciţiul 25. Să se calculeze aria mulţimii din plan delimitate de curba $y=\dfrac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|}$, dreptele $x=0$, $x=4$ şi axa Ox.

Exerciţiul 26. Fie f,g: $[2,5]\to\mathbf{R}$ funcţiile definite prin $f(x)=-x^2$ şi $g(x)=e^x$;$(\forall)x\in[2,5]$. Să se calculeze aria mulţimii plane delimitate de graficele funcţiilor f şi g şi dreptele de ecuaţii $x=2$ şi $x=5$.

Soluţie: Funcţiile f şi g sunt continue. Mai mult $f(x)\leq g(x)$,$(\forall)x\in[2,5]$, rezultă mulţimea $\Gamma_{f,g}$ delimitată de graficele celor două funcţii f şi g, dreptele $x=2$, $x=5$ are arie şi

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_2^5 \left(e^x + x^2\right)dx = \left(e^x + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^5 = e^5 - e^2 + 39.$$

Exercițiul 27. Să se calculeze aria mulțimii din plan delimitate de curbele $x=e^x$; $y=(x+1)e^{-2x}$ şi dreptele $x=0$, $x=1$.

Exercițiul 28. Să se calculeze aria mulțimii din plan delimitate de curbele $y=x\text{arctg}x$; $y=\ln(1+x^2)$ şi dreptele $x=0$, $x=1$.

Exercițiul 29. Să se calculeze aria mulțimii din plan delimitate de parabola $y=2x-x^2$ şi drepta $x+y=0$.

Exercițiul 30. Să se calculeze aria mulțimii din plan delimitate de curbele $y=2^x$; $y=2$ şi $x=0$.

Exercițiul 31. Să se calculeze aria mulțimii din plan delimitate de curbele $y=2-x^2$ şi $y^3=x^2$.

Exercițiul 32. Să se calculeze aria mulțimii din plan delimitate de curbele $y=\ln x$ şi $y=\ln^2 x$.

Exercițiul 33. Să se calculeze aria mulțimii din plan delimitate de curba $y=\max\{x^2+3x+2, -x^2+6x+7\}$, dreptele $x=-3$; $x=3$ şi axa Ox.

Exercițiul 34. Să se calculeze aria mulțimii din plan delimitate de curba $y=(1+mx)e^{mx}$; $m>0$ şi axele de coordonate.

Exercițiul 35. Să se calculeze aria mulțimii delimitate de curbele $y=\sqrt{4px-x^2}$; $y=\sqrt{2px}$ şi dreptele $x=0$ şi $x=2p$.

Exercițiul 36. Fie $a,b\in\mathbf{R}$ astfel încât $1<a<b$. Să se calculeze aria mulțimii delimitate de graficul funcției $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ definite prin:

$f(x)=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{(x-\cos t)^2+\sin^2 t}}dt$; $(\forall)x\in[a,b]$ şi dreptele de ecuații $x=a$; $x=b$ şi axa Ox.

Exercițiul 37. Fie $a,b\in\mathbf{R}$ astfel încât $0<a<b$. Să se calculeze aria mulțimii delimitate de graficul funcției $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ $f(x)=\int_0^x te^t dt$; $(\forall)x\in[a,b]$, dreptele de ecuații $x=a$; $x=b$ şi axa Ox.

Exercițiul 38. Să se calculeze aria mulțimii delimitate de graficul funcției $f:[-1,2]\to\mathbf{R}$ definite prin:

$$f(x)=\begin{cases}\max\{t^3-t^2 : t\ge x\}, & daca\ x\in[-1,1]\\ \min\{t^3-t^2 : t\le x\} & daca\ x\in(1,2]\end{cases}$$

dreptele de ecuații $x=-1$; $x=2$ şi axa Ox.

Exercițiul 39. Fie $f:[1,2]\to\mathbf{R}$ funcția definită prin: $f(x)=(1+|x|)^{1/x}$; $(\forall)x\in[1,2]$. Să se arate că aria mulțimii delimitate de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele $x=1$ şi $x=2$ este cuprinsă între $\sqrt{2}$ şi 3.

Exercițiul 40. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția $f:[0,2]\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=|x^2-1|$; $(\forall)x\in[0,2]$.

Soluție: Funcția f este continuă pe $[0,2]$ şi $f(x)\ge 0$, $(\forall)x\in[0,2]$, atunci corpul de rotație C_f determinat de funcția f are volum şi

$$vol(C_f)=\pi\int_0^2\left|x^2-1\right|^2dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\right)\Bigg|_0^2=\frac{46\pi}{15}.$$

Exercițiul 41. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția f: $[0,\pi]\to\mathbf{R}$ definită prin: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\cos x},\ daca\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\\ x-\frac{\pi}{2},\ daca\ x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}$

Exercițiul 42. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția f: $[0,2]\to\mathbf{R}$ definită prin: $f(x)=e^{-x}$; $(\forall)x\in[0,2]$.

Exercițiul 43. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția f: $[0,1]\to\mathbf{R}$ definită prin: $f(x)=\arcsin x$; $(\forall)x\in[0,1]$.

Exercițiul 44. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția f: $[1,e]\to\mathbf{R}$ definită prin: $f(x)=x\ln x$; $(\forall)x\in[1,e]$.

Exercițiul 45. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția f: $[0,\pi]\to\mathbf{R}$ definită prin: $f(x)=\begin{cases}\cos x; & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\\ x-\frac{\pi}{2}; & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\end{cases}$

Exercițiul 46. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția f: $[0,2]\to\mathbf{R}$ definită prin: $f(x)=(x+1)\sqrt{\left|x^2-1\right|}$;$(\forall)x\in[0,2]$.

Exercițiul 47. Fie $n\in\mathbf{N}$; $n\geq1$. Să se calculeze volumul V_n al corpului de rotație determinat de funcția f: $[0,2n\pi]\to\mathbf{R}$ definită prin: $f(x)=e^{-x}\sqrt{|\sin x|}$; $(\forall)x\in[0,2n\pi]$.

Exercițiul 48. Să se calculeze lungimea graficului funcției f: $[1,2]\to\mathbf{R}$; $f(x)=\arccos e^{-x}$; $(\forall)x\in[1,2]$.

Soluție: Evident funcția f este derivabilă şi $f'(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}=\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$; $(\forall)x\in[1,2]$. Deoarece f' este continuă pe $[1,2]$ rezultă că graficul funcției are lungime finită şi

$$l(f)=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{e^{2x}-1}}dx=\int_1^2\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx=$$

$$=ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)\Bigg|_1^2=\ln\frac{e^2+\sqrt{e^4-1}}{e+\sqrt{e^2-1}}.$$

Exercițiul 49. Să se calculeze lungimea graficului funcției f: $\left[\frac{1}{e},e\right]\to\mathbf{R}$ definite prin: $f(x)=\ln x$; $(\forall)x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$.

Exercițiul 50. Să se calculeze lungimea graficului funcției f: [0,1]→**R** definite prin: $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$; (∀)$x\in[0,1]$.

Exercițiul 51. Să se calculeze lungimea graficului funcției f: [3,5]→**R** definite prin $f(x)=\arcsin e^{-x}$; (∀)$x\in[3,5]$

Exercițiul 52. Să se calculeze lungimea graficului funcției f: [1, e] →**R** definite prin $f(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^2-\ln\sqrt{x}$; (∀)$x\in[1,e]$.

Exercițiul 53. Să se calculeze lungimea graficului funcției f: $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ →**R** definite prin $f(x)=\ln\sin x$; (∀)$x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$

Exercițiul 54. Fie $a>0$. Să se calculeze lungimea graficului funcției f: [0, a] →**R** definite prin $f(x)=e^x$; (∀)$x\in[0,a]$.

Exercițiul 55. Să se calculeze aria suprafeței de rotație determinată de funcția f: [-1,1] →**R** definită prin $f(x)=e^x$; (∀)$x\in[-1,1]$.

Soluție: Funcția f este derivabilă pe [-1,1] și $f'(x)=e^x$; (∀)$x\in[-1,1]$. Deoarece f' este continuă pe [-1,1] rezultă că suprafața de rotație determinată de funcția f are arie.

$$A(f)=2\pi\int_{-1}^{1}e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx=\pi\left[e^x\sqrt{1+e^{2x}}+\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)\right]\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{\pi}{e^2}\left(e^3-1\right)\sqrt{1+e^2}+\ln\frac{e\left(e+\sqrt{1+e^2}\right)}{1+\sqrt{1+e^2}}.$$

Exercițiul 56. Să se calculeze aria suprafeței de rotație determinate de funcția f: [0,π/2] →**R** definită prin $f(x)=\cos x$; (∀)$x\in[0,\pi/2]$.

Exercițiul 57. Să se calculeze aria suprafeței de rotație determinate de funcția f: [0,π/4] →**R** definită prin $f(x)=\mathrm{tg}x$; (∀)$x\in[0,\pi/4]$.

Exercițiul 58. Să se calculeze aria suprafeței de rotație determinate de funcția f: [0,1] →**R** definită prin $f(x)=e^{-x}$; (∀)$x\in[0,1]$.

Exercițiul 59. Fie $a>0$. Să se calculeze aria suprafeței de rotație determinate de funcția f: [-a, a] →**R** definită prin $f(x)=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}$; (∀)$x\in[-a,a]$.

Exercițiul 60. Fie f,g: [0,1] →**R** funcțiile definite prin $f(x)=x^4$ și $g(x)=\sqrt{x}$;(∀)$x\in[0,1]$. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene delimitate de graficele funcțiilor f și g și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Soluție: Funcțiile f și g sunt continue pe [0,1] și $f(x)\le g(x)$, (∀)$x\in[0,1]$. Avem:

$$x_G=\frac{\int_0^1 x\left(\sqrt{x}-x^4\right)dx}{\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^4\right)dx}=\frac{\int_0^1\left(x^{\frac{3}{2}}-x^5\right)dx}{\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}-x^4\right)dx}=\frac{1}{2},\ y_G=\frac{\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-x^8\right)dx}{\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^4\right)dx}=\frac{15}{36}\Rightarrow G\left(\frac{1}{2},\frac{15}{36}\right).$$

Exerciţiul 61. Fie f: $[0,2]\to\mathbf{R}$ funcţia definită prin $f(x)=\begin{cases}e^x, & daca\ x\in[0,1)\\ \frac{e}{x}, & daca\ x\in[1,2]\end{cases}$.

Să se calculeze centrul de greutate al plăcii plane omogene delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele x=0; x=2.

Exerciţiul 62. Să se calculeze centrul de greutate al plăcii plane omogene delimitate de curbele $y=x^3$, $y=x$ şi dreptele de ecuaţii x=0; x=1.

Exerciţiul 63. Să se calculeze centrul de greutate al plăcii plane omogene delimitate de curba $y=\cos x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0; $x=\pi/2$.

Exerciţiul 64. Să se calculeze centrul de greutate al plăcii plane omogene delimitate de curba $y=\sin x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0; $x=\pi$.

Exerciţiul 65. Să se calculeze centrul de greutate al plăcii plane omogene delimitate de curba $y=\sqrt{4-x^2}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0; x=2.

Exerciţiul 66. Să se calculeze centrul de greutate al plăcii plane omogene delimitate de curba $y=\frac{x^2}{4}-\ln\sqrt{x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1; x=2.

Exerciţiul 67. Fie $1\le a<b<+\infty$ şi $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ funcţia definită prin $f(x)=\ln x;(\forall)x\in(0,+\infty)$. Să se calculeze centrul de greutate al plăcii plane omogene delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=a$; $x=b$.

Exerciţiul 68. Fie $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ funcţia definită prin $F(x)=x^2$; $(\forall)x\in\mathbf{R}$. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{F}$ pentru deplasarea unei particule materiale P din punctul a=1 în punctul b=10.

Soluţie: Funcţia F este continuă şi atunci lucrul mecanic efectuat este:

$$L=L_{a,b}(F)=\int_1^{10}x^2dx=\frac{10^3-1}{3}=333.$$

Exerciţiul 69. Fie $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ funcţia definită prin $F(x)=x$; $(\forall)x\in\mathbf{R}$. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{F}$ pentru deplasarea unei particule materiale P din punctul a=0 în punctul b=4.

Exerciţiul 70. Fie $F:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ funcţia definită prin $F(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}; & x\in(0,1)\\ -x^4; & x\ge 1\end{cases}$.

Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{F}$ pentru deplasarea unei particule materiale P din punctul a=1/2 în punctul b=2.

Exerciţiul 71. Se consideră funcţia: $f(x)=\int_0^{\operatorname{arctg}x}e^{\operatorname{tg}^2 t}dt$.

a) Să se arate că f este definită şi derivabilă pe $\mathbf{R}$;
b) Să se calculeze f';
c) Să se deducă relaţia:

$$\int_0^1 \frac{xf(x)}{e^{x^2}}dx + \frac{1}{2e}\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}.$$

Exercițiul 72. a) Dacă f şi g sunt două funcții continue pe $[a,b]$ să se arate că trinomul:

$$t^2\int_a^b g^2(x)dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx$$

este nenegativ pentru $(\forall)t\in\mathbf{R}$.

b) Să se deducă inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski în forma integrală:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)}\sqrt{\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)}$$

Exercițiul 73. Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakovski în forma integrală să se arate că:

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \le \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \quad si \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x dx < \sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

Exercițiul 74. Fie f: $[0,a]\to\mathbf{R}$ o funcție cu derivata continuă şi astfel ca $f(0)=0$. Atunci:

a) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a (a-x)f'(x)dx$ şi să se deducă de aici că:

$$\left|\int_0^a f(x)dx\right| \le \frac{a^2}{2}\max_{0\le x\le a}\left|f'(x)\right|;$$

b) $\int_0^a \left|f'(x)f(x)\right|dx \le \frac{a}{2}\int_0^a \left|f'(x)\right|^2 dx$.

Exercițiul 75. Să se determine numărul $n\in\mathbf{N}$ astfel ca volumul corpului ob]inut prin rotirea graficului funcției $f(x)=\cos(n\arccos x)$ în jurul axei Ox să fie egal cu $\frac{2\pi}{3}$.

Exercițiul 76. (problema 23314 G.M. 7/1995 pag.333) Notăm $a_n = \int_n^{n+1} x\sin\frac{1}{x}dx$,n$\in\mathbf{N}^*$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}(n^\alpha a_n)$, unde $a\in\mathbf{R}$ este fixat.

Soluție: Conform teoremei de medie $(\exists)x_n\in(n,n+1)$ astfel încât $a_n = x_n\sin\frac{1}{x_n}$.

Cum $x_n>n$, rezultă $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Atunci: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} x_n \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x_n}}{\frac{1}{x_n}} = 1$. Prin urmare $\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} 0, & daca \ \alpha<0 \\ 1, & daca \ \alpha=0 \\ \infty & daca \ \alpha>0 \end{cases}$.

Exercițiul 77. (problema 23319 G.M. 7/1995 pag 333) Fie funcția f:**R**→**R**; $f_n(x)=\dfrac{2nx}{x^2+x+n^2}$, $n\in\mathbf{N}^*$ şi $a_n=\max f_n(x)$.

a) Să se calculeze $A_n=a_1a_2...a_n$ şi să se arate că: $A_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$.

b) Să se calculeze $B_n(m)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k C_n^k}{2k+m}$; $m\in\mathbf{N}^*$ fixat.

Soluție: a) Derivata funcției f_n este funcția f'_n:**R**→**R**, $f_n'=\dfrac{2n(n^2-x^2)}{\left(x^2+x+n^2\right)}$.

Maximul funcției se atinge în punctul $x=n$ şi este $a_n=\dfrac{2n}{2n+1}$. Atunci:

$A_n=a_1a_2...a_n=\dfrac{2}{3}\dfrac{4}{5}...\dfrac{2n}{2n+1}$ (1)

Calculăm acum suma $S=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$. Folosind proprietățile integralei şi faptul că integrala unei funcții pare pe un interval $[-a,a]$ este dublul integralei acelei funcții pe intervalul $[0,a]$, avem:

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k C_n^k\int_0^1 x^{2k}dx\right]=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k}\right)dx=$$
$$=\int_0^1(1-x^2)^n dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx=\frac{1}{2}A_{n,n} \quad (2)$$

unde pentru $m,n\in\mathbf{N}$ notăm $A_{n,m}=\int_{-1}^{1}(1+x)^n(1+x)^m dx$. Calculând prin părți, obținem formula de recurență $A_{n,m}=\dfrac{n}{m+1}A_{n-1,m+1}$ pe care aplicând-o în mod repetat obținem:

$$A_{n,m}=\frac{n!}{(m+1)(m+2)...(m+n)}A_{0,m+n}=\frac{2^{m+n+1}m!n!}{(m+n+1)!}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}A_{n,n}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!!(2n+1)!!}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot2n}{3\cdot5\cdot7\cdot...\cdot(2n+1)}$$

Ținând seama de (1) şi (2) rezultă $A_n=S=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$.

b)
$$B_n(m)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+m}=\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k C_n^k\int_0^1 x^{2^{k+m-1}}dx\right]=$$
$$=\int_0^1 x^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\right)dx=\int_0^1 x^{m-1}(1-x^2)^n dx.$$

Integrând prin părți se obține formula de recurență $B_n(m)=B_{n+1}(m-2)$. Se aplică repetat această formulă, discutându-se după paritatea lui m, iar

$$B_q(1)=\int_0^1 (1-x^2)^q\,dx=\frac{1}{2}A_{q,q} \quad iar$$

$$B_q(2)=\int_0^1 x\left(1-x^2\right)^q dx=\left.\frac{(1-x^2)^{q+1}}{-2(q+1)}\right|_0^1=\frac{1}{2(q+1)}.$$

Exercițiul 78 (problema dată la olimpiada 1997, etapa pe municipiu, Bucureşti)

Fie $p\in\mathbf{N}^*$ şi $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir cu $a_n\geq 1$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$ şi $a_n\to\infty$. Să se calculeze

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{[a_n]^p}\frac{a_n}{a_n^2+k^2}$, (unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului x).

Soluție: Fie $n\in\mathbf{N}^*$ şi $f:\left[0,\frac{[a_n]^p}{a_n}\right]\to \mathrm{R};\ f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Considerăm diviziunea

$\Delta=\left(0,\frac{1}{a_n},\frac{2}{a_n},\ldots,\frac{[a_n]^p-1}{a_n},\frac{[a_n]^p}{a_n}\right)$ şi sumele inferioare şi superioare Darboux:

$$s_\Delta(f)=\sum_{k=1}^{[a_n]^p} f\left(\frac{k}{a_n}\right)\frac{1}{a_n}=\sum_{k=1}^{[a_n]^p}\frac{a_n}{a_n^2+k^2} \quad si$$

$$S_\Delta(f)=\sum_{k=1}^{[a_n]^p} f\left(\frac{k-1}{a_n}\right)\frac{1}{a_n}=f(0)\frac{1}{a_n}+\sum_{k=1}^{[a_n]^p}\frac{a_n}{a_n^2+k^2}-f\left(\frac{[a_n]^p}{a_n}\right)\frac{1}{a_n} \quad (1)$$

Funcția fiind descrescătoare pe $[0,+\infty)$.

Dacă notăm $(x_n)_{n\geq 1}$, şirul dat de relațiile (1), deducem că

$$S_\Delta(f)-\frac{1}{a_n}+f\left(\frac{[a_n]^p}{a_n}\right)\frac{1}{a_n}=x_n=s_\Delta(f) \qquad (2).$$

Cum f este continuă rezultă că f este integrabilă pe

$\left(0,\frac{[a_n]^p}{a_n}\right)$, din (2) rezultă

$$\int_0^{\frac{[a_n]^p}{a_n}} f(x)dx+b_n\leq x_n\leq \int_0^{\frac{[a_n]^p}{a_n}} f(x)dx,\quad unde\ b_n=\frac{1}{a_n}\left[f\left(\frac{[a_n]^p}{a_n}\right)-1\right],$$

deci $\operatorname{arctg}\frac{[a_n]^p}{a_n}+b_n\leq x_n\leq \operatorname{arctg}\frac{[a_n]^p}{a_n};(\forall)n\geq 1 \quad (3)$

Deoarece f este mărginită şi $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. Dacă p=1 din (3) rezultă

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{4}$, iar dacă $p\geq 2$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$.

Exercițiul 79. (problemă dată la olimpiada națională 1997)

Să se arate că pentru orice funcție continuă $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ are loc inegalitatea: $\int_{-1}^{1} f^2(x)dx \ge \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(x)dx\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} xf(x)dx\right)^2$. Precizați funcțiile *f* pentru care inegalitatea de mai sus devine egalitate.

Soluție: Dacă *f* este pară atunci $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0$ şi inegalitatea din enunț devine:

$\int_{0}^{1} f^2(x)dx \ge \left(\int_{0}^{1} f(x)dx\right)^2$ (1)

Dacă *f* este impară, ea devine: $\int_{0}^{1} f^2(x)dx \ge 3\left(\int_{0}^{1} xf(x)dx\right)^2$ (2). Inegalită]ile (1) şi (2) se deduc din inegalitatea Cauchy-Schwartz-Buniakowski $\left(\int_{0}^{1} f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_{0}^{1} f^2(x)dx \int_{0}^{1} g^2(x)dx$, considerând $g(x)=1$ pentru (1) şi $g(x)=x$ pentru (2).

Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ o funcție continuă şi $f_1,f_2:[-1,1]\to\mathbf{R}$ $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$; $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Evident f_1 este pară, f_2 este impară şi $f=f_1+f_2$. Cum f_1f_2 este impară atunci

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)dx = \int_{-1}^{1} f_1^2(x)dx + \int_{-1}^{1} f_2^2(x)dx = 2\left(\int_{0}^{1} f_1^2(x)dx + \int_{0}^{1} f_2^2(x)dx\right) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(x)dx\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} xf(x)dx\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} f_1(x)dx\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} xf_2(x)dx\right)^2 =$$

$$= 2\left[\left(\int_{0}^{1} f_1(x)dx\right)^2 + 3\left(\int_{0}^{1} xf_2(x)dx\right)^2\right] \quad (4)$$

Din (3) şi (4) inegalitatea din enunț devine:

$\int_{0}^{1} f_1^2(x)dx + \int_{0}^{1} f_2^2(x)dx \ge \left(\int_{0}^{1} f_1(x)dx\right)^2 + 3\left(\int_{0}^{1} xf_2(x)dx\right)^2$, care este adevărată din (1) şi (2).

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă:

$$\int_{0}^{1} f_1^2(x)dx = \left(\int_{0}^{1} f_1(x)dx\right)^2 \quad si \quad \int_{0}^{1} f_2^2(x)dx = 3\left(\int_{0}^{1} xf_2(x)dx\right)^2.$$

Cum în inegalitatea C-S-B cazul de egalitate are loc dacă şi numai dacă $f=\lambda g$ cu $\lambda\in\mathbf{R}$ obținem: $f_1(x)=a$, $f_2(x)=bx$ cu $a,b\in\mathbf{R}$ şi deci $f(x)=a+bx$, $(\forall)x\in[-1,1]$.

Exercițiul 80. (problemă dată la olimpiada națională 1997)

Fie şirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, f_n: $[0,1]\to[0,+\infty)$ cu f_0 continuă arbitrară şi $f_{n+1}(x)=\int_0^x \frac{1}{1+f_n(t)}dt$; $(\forall)n\in\mathbf{N}$ şi $x\in[0,1]$. Să se arate că pentru orice $x\in[0,1]$ şirul f_n este convergent şi să se calculeze limita sa.

Soluție: Pentru început vom rezolva în mulțimea funcțiilor continue şi pozitive pe $[0,1]$ ecuația funcțională $f(x)=\int_0^1 \frac{1}{1+f(t)}dt$, $x\in[0,1]$ (1)

Fie f o soluție a ecuației (1). Atunci f este derivabilă pe $[0,1]$ şi $f'(x)=\frac{1}{1+f(x)}$ sau $f'(x)(1+f(x))=1$. Cum $\int_0^x f'(t)(1+f(t))dt=\int_0^x dt$ şi $f(0)=0$, obținem $\frac{f^2(x)}{2}+f(x)-x=0,\ deci\ \ f(x)=\sqrt{1+2x}-1$. Vom arăta că $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, $(\forall)x\in[0,1]$. Pentru $x=0$ este evident. Fie $x\in(0,1)$. Avem:

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|\int_0^x\left(\frac{1}{1+f_{n-1}(t)}-\frac{1}{1+f(t)}\right)dt\right|=\left|\int_0^x\frac{f(t)-f_{n-1}(t)}{\left(1+f_{n-1}(t)\right)\left(1+f(t)\right)}dt\right|\leq$$

$$\leq\int_0^x\left|f_{n-1}(t)-f(t)\right|dt=x\left|f_{n-1}(t_1)-f(t_1)\right|\ cu\ \ t_1\in[0,x]$$

obținut prin aplicarea teoremei de medie funcției $f_{n-1}-f$ pe $[0,x]$. Procedând analog obținem:

$$\left|f_{n-1}(t_1)-f(t_1)\right|\leq t_1\left|f_{n-2}(t_2)-f(t_2)\right|\leq t_1t_2\left|f_{n-3}(t_3)-f(t_3)\right|\leq\ldots\leq$$

$$\leq t_1t_2\ldots t_{n-1}\left|f_0(t_n)-f(t_n)\right|\ cu\ 0\leq t_n\leq\ldots\leq t_1\leq x$$

Obținem în final $\left|f_n(x)-f(x)\right|\leq x^n\max_{t\in[0,1]}\left|f_0(t)-f(t)\right|$. Cum

$\lim_{n\to\infty} x^n\max_{t\in[0,1]}\left|f_0(t)-f(t)\right|=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$.

Pentru $x=1$, fie $\varepsilon>0$ şi $a\in(0,\varepsilon/4)$. Avem:

$$\left|f_n(1)-f(1)\right|\leq\int_0^1\left|f_{n-1}(t)-f(t)\right|dt=\int_0^{1-a}\left|f_{n-1}(t)-f(t)\right|dt+\int_{1-a}^1\left|f_{n-1}(t)-f(t)\right|dt\leq$$

$$\leq\int_0^{1-a}\left|f_{n-1}(t)-f(t)\right|dt+a\max_{t\in[0,1]}\left|f_{n-1}(t)-f(t)\right|\leq\int_0^{1-a}\left|f_{n-1}(t)-f(t)\right|dt+$$

$$+a\max_{t\in[0,1]}\left(\left|f_{n-1}(t)\right|+\left|f(t)\right|\right)\leq\int_0^{1-a}\left|f_{n-1}(t)-f(t)\right|dt+2a$$

Cum $\lim_{n\to\infty}\int_0^{1-a}\left|f_{n-1}(t)-f(t)\right|dt=0$, $(\exists)N_\varepsilon\in\mathbf{N}$ astfel încât pentru $(\forall)n\geq N_\varepsilon$ rezultă $\int_0^{1-a}\left|f_{n-1}(t)-f(t)\right|dt\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

Obținem $\left|f_n(1)-f(1)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}+2a<\varepsilon$, $(\forall)n\geq N_\varepsilon$ deci $\lim_{n\to\infty} f_n(1)=f(1)$.

Exercițiul 81. (23733 G.M. 4-5/1997 pag.199)

Fie f: `[0,1]`$\to\mathbf{R}$ derivabilă de două ori pe `[0,1]` cu $f''(x)>0$, $(\forall)x\in$`[0,1]`. Dacă $p\in\mathbf{N}$, $p\geq 2$ demonstraţi că:

$$\int_{\frac{1}{p}}^{1} f(x)dx \leq \frac{p-1}{p^2} f(1) + \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 \int_0^1 f(x)dx$$

Soluţie: Funcţia f este integrabilă Riemann pe `[0,1]` deci şi pe `[1/p,1]`. Fie Δ o diviziune echidistantă a intervalului `[1/p,1]` de normă $\frac{p-1}{pn}$

$$\Delta: x_0 = \frac{1}{p} < x_1 = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{pn} < \ldots < x_k = \frac{1}{p} + \frac{k(p-1)}{pn} < \ldots < x_n = \frac{1}{p} + \frac{n(p-1)}{pn} = 1$$

Atunci:

$$\int_{\frac{1}{p}}^{1} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{p} + \frac{k(p-1)}{pn}\right)\frac{p-1}{pn} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{p-1}{pn} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{p} + \frac{k(p-1)}{pn}\right).$$

Funcţia f fiind convexă, avem:

$$f\left(\frac{1}{p} + \frac{k(p-1)}{pn}\right) = f\left(\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p}\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{p} f(1) + \frac{p-1}{p} f\left(\frac{k}{n}\right) \; deci$$

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{p} + \frac{k(p-1)}{pn}\right) \leq \frac{n}{p} f(1) + \frac{p-1}{p} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \; si$$

$$\frac{p-1}{pn} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{p} + \frac{k(p-1)}{pn}\right) \leq \frac{p-1}{p^2} f(1) + \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{n}{k}\right)$$

Prin urmare

$$\int_{\frac{1}{p}}^{1} f(x)dx \leq \frac{p-1}{p^2} f(1) + \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{n}{k}\right).$$

Dar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{n}{k}\right) = \int_o^1 f(x)dx$ deci:

$$\int_{\frac{1}{p}}^{1} f(x)dx \leq \frac{p-1}{p^2} f(1) + \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 \int_0^1 f(x)dx$$ ceea ce trebuia arătat.

<u>Exerciţiul 82.</u> (G.M. 7-8/1997, problema 23776)

Să se arate că dacă f: `[1989,1999]`$\to\mathbf{R}$ este o funcţie integrabilă şi convexă, atunci $\int_{1992}^{1996} f(x)dx \leq \int_{1989}^{1991} f(x)dx + \int_{1997}^{1999} f(x)dx$

Soluţie: Considerăm şirurile de diviziuni echidistante tinzând în normă la zero pentru intervalele
[1989,1991],[1992,1994],[1994,1996],[1997,1999].

$$\Delta_1^n = (1989 = x_o^n < ... < x_n^n = 1991),\ x_k^n = 1989 + \frac{2}{n}k;\ k = \overline{0,n}$$

$$\Delta_2^n = (1992 = y_0^n < ... < y_n^n = 1994),\ y_k^n = 1992 + \frac{2}{n}k;\ k = \overline{0,n}$$

$$\Delta_3^n = (1994 = z_0^n < ... < z_n^n = 1996),\ z_k^n = 1994 + \frac{2}{n}k;\ k = \overline{0,n}$$

$$\Delta_4^n = (1997 = t_0^n < ... < t_n^n = 1999),\ t_k^n = 1997 + \frac{2}{n}k;\ k = \overline{0,n}$$

Atunci $\left\|\Delta_i^n\right\| = \frac{2}{n} \to 0.(\forall) i \in \{1,...,4\}$. Vom determina $\lambda, \mu \in (0,1)$ astfel încât $y_k^n = \lambda x_k^n + (1-\lambda) t_k^n$ *si* $z_k^n = \mu x_k^n + (1-\mu) t_k^n$ $(\forall) n \in \mathbf{N}^*,\ k \in \{1,...,n\}$. Avem:

$$1992 + \frac{2}{n}k = \lambda\left(1989 + \frac{2}{n}k\right) + (1-\lambda)\left(1997 + \frac{2}{n}k\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1992 = 1997 - 8\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{8}$$

şi analog $\mu = \frac{3}{8}$.

Folosind convexitatea funcţiei *f*, avem:

$$f(y_k^n) \le \frac{5}{8} f(x_k^n) + \frac{3}{8} f(t_k^n)\ si\ f(z_k^n) = \frac{3}{8} f(x_k^n) + \frac{5}{8} f(t_k^n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y_k^n) + f\left(z_k^n\right) \le f(x_k^n) + f(t_k^n), (\forall) n \in \mathrm{N}^*, (\forall) k = \overline{0,n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(y_k^n)\frac{2}{n} + \sum_{k=1}^{n} f(z_k^n)\frac{2}{n} \le \sum_{k=1}^{n} f(x_k^n)\frac{2}{n} + \sum_{k=1}^{n} f(t_k^n)\frac{2}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{\Delta_2^n}\left(f, \left(y^n\right)\right) + \sigma_{\Delta_3^n}\left(f, \left(z^n\right)\right) \le \sigma_{\Delta_1^n}\left(f, \left(x^n\right)\right) + \sigma_{\Delta_4^n}\left(f, \left(t^n\right)\right)$$

Deoarece *f* este integrabilă pe intervalele compacte mai sus menţionate, trecând la limită se obţine:

$$\int_{1992}^{1994} f(x)dx + \int_{1994}^{1996} f(x)dx \le \int_{1989}^{1991} f(x)dx + \int_{1997}^{1999} f(x)dx \text{ rezultă:}$$

$$\int_{1992}^{1996} f(x)dx \le \int_{1989}^{1991} f(x)dx + \int_{1997}^{1999} f(x)dx.$$

<u>Exerciţiul 83.</u> (G.M. 8/1995, problema 23341)

Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2n}\left(\sin\frac{k\pi}{4n} + \cos\frac{k\pi}{4n}\right)}$$

Soluţie:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\sin\frac{k\pi}{4n}+\cos\frac{k\pi}{4n}\right)}\frac{1}{n}$$

Fie f: [0,1]→**R**, $f(x)=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$ continuă pe [0,1] şi deci integrabilă pe [0,1]. Considerăm pe [0,1] şirul de diviziuni Δ_n:($0=x_0<x_1=\frac{1}{n}<...<x_n=1$) cu $\|\Delta\|=\frac{1}{n}\to 0$ şi sistemul de puncte intermediare $\xi_k=\frac{k}{n},\ k=\overline{1,n}$; suma din enunț este o sumă Riemann a funcției f pe [0,1] multiplicată cu $\frac{1}{2\sqrt{2}}$:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_k)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\frac{k}{n}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\frac{k}{n}\right)}$$

$$L=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}dx\overset{\frac{\pi}{4}x=t}{=}\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin t+\cos t}\frac{4}{\pi}dt=$$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}dt$$

Cum

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}dt=\ln tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln tg\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=$$

$$=\ln 1-\ln(\sqrt{2}-1)=\ln\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\ln(\sqrt{2}+1).$$

Exercițiul 84. Să se arate că există o funcție continuă f:**R**→**R** astfel încât $\frac{1}{x^2}\int_0^x e^t\sin t dt+f(x)=\frac{1}{2}$,(∀)$x\in\mathbf{R}^*$.

Exercițiul 85. Fie $f(x)=4\sqrt{ex}+2e\ln\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\sqrt{x}+\sqrt{e}}$. Se cer:

a) Aria cuprinsă între graficul lui f, axa Ox şi dreptele $x=2e$, $x=3e$;

b) Lungimea arcului de curbă $y=f(x)$ cuprins între dreptele $x=2e$, $x=3e$.

Exercițiul 86. Să se calculeze volumul torului generat de rotația suprafeței plane limitate de cercul

$$x^2+(y-h)^2=R^2,\ (h>R)$$

în jurul axei Ox.