Polinoame

Forma algebricã a unui polinom

$f\in\mathbf{C}[X]$ este $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \ldots + a_0$, unde n este gradul, a_n – coeficientul dominant, a_0 – termenul liber.

Funcţia polinomialã asociatã lui $f\in\mathbf{C}[X]$ este $\tilde{f}:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$, $\forall\,\alpha\in\mathbf{C}$; $f(\alpha)$ fiind valoarea polinomului f în α.

Teorema împãrţirii cu rest: $\forall f,g\in\mathbf{C}[X]$, $g\neq 0$ existã polinoamele unice $q,r\in\mathbf{C}[X]$ astfel încât $f = gq + r$, grad $r <$ grad g.

Împãrţirea unui polinom cu X-a: Restul împãrţirii polinomului $f\in\mathbf{C}[X]$, $f\neq 0$ la X-a este $f(a)$.

Schema lui Horner: ne ajutã sã aflãm câtul $q = b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \ldots + b_0$ al împãrţirii polinomului $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \ldots + a_0$ la binomul X-a; precum şi restul acestei împãrţiri $r = f(a)$;

	a_n	a_{n-1}	…	a_1	a_0
a	$b_n = a_n$	$b_{n-1} = ab_n+a_{n-1}$	…	$b_1 = ab_2+a_1$	$r=f(a)=ab_1+a_0$

Divizibilitatea polinoamelor

Definiţia 1.Fie $f,g\in\mathbf{C}[X]$, spunem cã ***g divide pe f*** şi notãm ***g / f*** dacã $\exists \boldsymbol{q}\in\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ astfel încât $\boldsymbol{f=gq}$.

Proprietãţi:

1. a / f, $\forall a\in\mathbf{C}^*$, $\forall f\in\mathbf{C}[X]$;
2. g / f şi $f\neq 0 \Leftrightarrow r = 0$;
3. g / f şi $f\neq 0 \Rightarrow$ grad $f \geq$ grad g;
4. $a\in\mathbf{C}^* \Rightarrow af / f$;
5. f / f (refelexivitate);
6. f / g şi $g / h \Rightarrow f / h$ (tranzitivitate);
7. f / g şi $g / f \Rightarrow \exists\, a\in\mathbf{C}^*$ cu $f = ag$ (f,g sunt asociate în divizibilitate).

Definiţia2. Un polinom d se numeşte ***cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.)*** al polinoamelor f şi g dacã:
1) d / f şi d / g.
2) d' / f şi $d' / g \Rightarrow d' / d$ şi notãm $d=(f,g)$

Definiţia 3. Dacã $\boldsymbol{d=1}$ atunci f şi g se numesc ***prime între ele***.

Definiţia 4. Un polinom m se numeşte ***cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.)*** al polinoamelor f şi g dacã:
1) f / m şi g / m.
2) f / m' şi $g / m' \Rightarrow m / m'$

Teoremã. Dacã $d=(f,g)$ atunci $m = \dfrac{f\cdot g}{d}$

Rãdãcinile polinoamelor

Definiţia 1. Numãrul $\alpha\in\mathbf{C}$ se numeşte ***rãdãcinã*** a polinomului f dacã şi numai dacã $\tilde{f}(\alpha)= 0$.

Teorema lui Bezout: Numãrul $\alpha\in\mathbf{C}$ este rãdãcinã a polinomului $f\neq 0\Leftrightarrow(X-a) / f$.

Definiţia 2. Numãrul α se numeşte ***rãdãcinã multiplã de ordinul p*** a polinomului $f\neq 0$ dacã şi numai dacã $(X-a) / f$ iar $(X-a)^{p+1}$ nu divide pe f.

Teoremã: Dacã $f\in\mathbf{C}[X]$ este un polinom de gradul n şi $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ sunt rãdãcinile lui cu ordinele de multiplicitate $m_1,m_2,m_3,\ldots,m_n$ atunci $f = a_n(X-x_1)^{m_1}(X-x_2)^{m_2}\ldots(X-x_n)^{m_n}$ unde a_n este coeficientul dominant al lui f, iar $m_1 + m_2 + \ldots + m_n =$ grad f.

Ecuaţii algebrice

Definiţia 1. O ecuaţie de forma $f(x) = 0$ unde $f \neq 0$ este un polinom, se numeşte ***ecuaţie algebricã***.

Teorema lui Abel-Ruffini: Ecuaţiile algebrice de grad mai mare decât patru nu se pot rezolva prin radicali.

Teorema lui D'Alambert-Gauss: Orice ecuaţie algebricã de grad mai mare sau egal cu unu, are cel puţin o rãdãcinã (complexã).

Formulele lui Viète: Dacã numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rãdãcinile polinomului $f \in C[x]$, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_n \neq 0$ atunci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2\ldots x_k + x_1x_2\ldots x_{k-1}x_{k+1} + \ldots + x_{m-k+1}x_{m-k+2}\ldots x_m = (-1)^k\dfrac{a_k}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Polinoame cu coeficienţi din R, Q, Z

Teoremã: Dacã $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_0 \neq 0$ admite pe $\alpha = a + ib$, $b \neq 0$ ca rãdãcinã, atunci el admite ca rãdãcinã şi pe $\overline{\alpha} = a - ib$, iar α şi $\overline{\alpha}$ au acelaşi ordin, de mutiplicitate.

Teoremã: Dacã un polinom $f \in \mathbf{Q}[X]$ admite pe $\alpha = a + b\sqrt{d}$ ($a, b \in \mathbf{Q}$, $b \neq 0$, $d \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$) ca rãdãcinã, atunci el admite şi pe $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{d}$, iar α şi $\overline{\alpha}$ au acelaşi ordin, de mutiplicitate.

Teoremã: Dacã un polinom $f \in \mathbf{Z}[X]$, grad $f \geq 1$, admite o rãdãcinã $\alpha = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, $(p,q) = 1$ atunci p / a_0 şi q / a_n.

În particular dacã $f \in \mathbf{Z}[X]$ are rãdãcina $\alpha = p \in \mathbf{Z}$ atunci p / a_0.

Probleme propuse bacalaureat

1. Se consideră polinoamele cu coeficienţi reali $f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96$ şi $g = X^2 + 2X - 24$.
a) Să se scrie forma algebrică a polinomului $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$.
b) Să se determine $a,b \in \mathbf{R}$ astfel încât polinoamele f şi $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$ să fie egale.
c) Să se rezolve în **R** ecuaţia $16^x + 2\cdot 8^x - 28\cdot 4^x - 8\cdot 2^x + 96 = 0$.

2. Fie polinoamele $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$ şi $g = X + \hat{3}$ din inelul $\mathbf{Z}_5[X]$.
a) Să se determine $a \in \mathbf{Z}_5$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.
b) Pentru $a = \hat{1}$, să se arate că $f = (X + \hat{1})(X^2 + \hat{1})$.
c) Pentru $a = \hat{1}$, să se rezolve în inelul $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$ ecuaţia $f(x) = \hat{0}$.

3. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbf{Z}_5[X]$, $f = \left(\hat{3}a + \hat{3}b\right)X^2 + \hat{2}X + \hat{2}a + \hat{3}b$ şi
$g = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{3}a + \hat{2}b$.
a) Să se determine $a,b \in \mathbf{Z}_5$, astfel încât cele două polinoame să fie egale.
b) Pentru $a = b = \hat{2}$, să se calculeze în $\mathbf{Z}_5$ suma $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) + f(\hat{3}) + f(\hat{4})$.
c) Pentru $a = b = \hat{2}$, să se rezolve în $\mathbf{Z}_5$ ecuaţia $f(x) = \hat{0}$.

4. Se consideră polinoamele $f = (X+1)^{2008} + (X-1)^{2008}$ şi $g = X + 1$. Polinomul f are forma algebrică $f = a_{2008}X^{2008} + a_{2007}X^{2007} + \ldots + a_1X + a_0$, cu $a_0, a_1, \ldots, a_{2008} \in \mathbf{R}$.
a) Să se determine a_0.
b) Să se calculeze restul împărţirii polinomului f la polinomul g.
c) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

5. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbf{R}[X]$, $f = (X-1)^{10} + (X-2)^{10}$ şi $g = X^2 - 3X + 2$.
a) Să se descompună polinomul g în produs de factori ireductibili în $\mathbf{R}[X]$.
b) Să se demonstreze că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g.
c) Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

6. Se consideră polinomul $f = X^4 + mX^2 + n$, unde $m,n \in \mathbf{R}$. Rădăcinile polinomului sunt x_1, x_2, x_3, x_4.
a) Să se determine $m,n \in \mathbf{R}$ ştiind că polinomul f admite rădăcinile $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.
b) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului să verifice relaţia
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$.
c) Pentru $m = 1$ şi $n = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbf{R}[X]$.

7. Se consideră polinoamele cu coeficienţi raţionali $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ şi $g = X^3 + X - 2$.
a) Să se determine $a,b \in \mathbf{Q}$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.
b) Pentru $a = -3$ şi $b = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbf{Q}[X]$.
c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6\cdot 3^{-x} = 0$.

8. Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$.
a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X^2 - 1$.
b) Să se verifice că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - 18$.
c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(3^x) = 0$.

9. Se consideră polinomul cu coeficienţi raţionali $f = X^3 + aX^2 - 5X + 14$ şi suma
$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
a) Să se determine numărul raţional a astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1 = 2$.
b) Pentru $a = -4$ să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.
c) Pentru $a = -4$ să se demonstreze egalitatea $S_3 + 42 = 4S_2 + 5S_1$.

10. În mulţimea $\mathbf{R}[X]$ se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ şi $g = X^2 - X - 1$.
a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

b) Să se arate că dacă y este rădăcină a polinomului g, atunci $y^3 = 2y + 1$.

c) Să se demonstreze că dacă y este rădăcină a polinomului g, atunci $f(y)$ nu este număr raţional.

11. Se consideră polinoamele $f = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X + \hat{4} \in \mathbf{Z}_5[X]$ şi

$g = \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3} \in \mathbf{Z}_5[X]$.

a) Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$.

b) Să se rezolve în mulţimea $\mathbf{Z}_5$ ecuaţia $f(x) = \hat{0}$.

c) Să se determine câtul împărţirii polinomului f la polinomul g.

12. Se consideră polinomul $f = mX^3 + 11X^2 + 7X + m$ care are coeficienţii reali.

a) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g = X - 1$.

b) Pentru $m = -9$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbf{R}[X]$.

c) Pentru $m = -9$ să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.

13. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + (a+3)X^2 + 6X - 4$ care are coeficienţii reali şi rădăcinile lui $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine $a \in \mathrm{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + x_3 = 3$.

b) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât polinomul să fie divizibil cu $X - \sqrt{2}$.

c) Pentru $a = -3$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbf{R}[X]$.

14. Se consideră polinomul $f = X^3 - (m+1)X^2 - 3X + 3$, $f \in \mathbf{Q}[X]$.

a) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât suma rădăcinilor polinomului f să fie egală cu 1.

b) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1 = \sqrt{3}$.

c) Pentru $m = 0$ să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbf{Q}[X]$.

15. Fie polinomul $f_a = X^3 + aX^2 - aX - 4$ care are coeficienţii numere reale.

a) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 = -2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile reale ale polinomului f_a.

b) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât polinomul f_a să fie divizibil cu polinomul $X^2 - 2$.

c) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care polinomul f_a are o rădăcină raţională pozitivă.

16. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 - X - 1$, unde $a \in \mathbf{Z}$.

a) Să se determine a ştiind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.

b) Pentru $a = 1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

c) Să se demonstreze că $f(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$.

17. Se consideră mulţimea $H = \left\{a + bX + cX^2 \middle| a, b, c \in \mathbf{Z}\right\}$ şi polinoamele $f, g \in \mathbf{Z}_2[X]$,

$f = X^2 + \hat{1}$ şi $g = X + \hat{1}$.

a) Să se verifice că $g^2 = f$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $f + g$ la polinomul f.

c) Să se determine numărul elementelor mulţimii H.

18. Se consideră inelul polinoamelor $\mathbf{Z}_3[X]$.

a) Pentru $g \in \mathbf{Z}_3[X]$, $g = \left(X + \hat{2}\right)^2 \left(X + \hat{1}\right)$, să se calculeze $g\left(\hat{0}\right)$.

b) Dacă $f \in \mathbf{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X$, să se arate că $f(x) = \hat{0}$, oricare ar fi $x \in \mathbf{Z}_3$.

c) Să se determine toate polinoamele $h \in \mathbf{Z}_3[X]$, care au gradul egal cu 3 şi pentru care $h(\hat{0}) = h(\hat{1}) = h(\hat{2})$.

19. Se consideră polinomul $f = 4X^4 + 4mX^3 + (m^2 + 7)X^2 + 4mX + 4$, unde $m \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ ştiind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.

b) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ ştiind că suma rădăcinilor polinomului f este egală cu 0.

c) Pentru $m = -5$ să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

20. Se consideră polinomul $f = \left(X^2 - 2X + 1\right)^2 - a^2$, unde $a \in \mathbf{R}$.

a) Ştiind că $a = 0$ să se determine soluţiile ecuaţiei $f(x) = 0$.

b) Să se verifice că $f = (X^2 - 2X + 1 + a)(X^2 - 2X + 1 - a)$.

c) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.

21. Se consideră ecuaţia $x^4 - ax^3 - ax + 1 = 0$ cu soluţiile x_1, x_2, x_3, x_4, unde $a \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$.

b) Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei, pentru $a = 1$.

c) Să se determine valorile întregi ale lui a pentru care ecuaţia admite cel puţin o soluţie număr întreg.

22. Se consideră polinomul $f = X^4 - 12X^2 + 35 \in \mathbf{R}[X]$.

a) Să se arate că $f = \left(X^2 - 6\right)^2 - 1$.

b) Să se demonstreze că polinomul f nu are rădăcini întregi.

c) Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbf{R}[X]$.

23. Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + aX^2 + bX + c$, unde $a,b,c \in \mathbf{R}$.

a) Pentru $a = c = 1$ şi $b = -1$ să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X^2 + 1$.

b) Să se determine numerele a, b, c ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X^2 + 1$ este X, iar restul împărţirii polinomului f la $X - 1$ este -1.

c) Să se demonstreze că , atunci f nu are toate rădăcinile reale.

24. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbf{R}[X]$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

a) Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

b) Să se determine rădăcinile polinomului f ştiind că $a = -1$, $b = -2$ şi $c = 0$.

c) Ştiind că rădăcinile polinomului f sunt în progresie aritmetică, să se demonstreze că $b = a - 1$.

25. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, unde $a,b \in \mathbf{R}$.

a) Pentru $a = 1$ şi $b = 0$ să se determine x_1, x_2, x_3.

b) Ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$, să se arate că $a = 1$.

c) Ştiind că $f = \left(X - x_1^2\right)\left(X - x_2^2\right)\left(X - x_3^2\right)$, să se determine numerele reale a şi b.

26. În mulţimea $\mathbf{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + pX^2 + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 şi $p \in \mathbf{R}$.

a) Să se calculeze $f(-p)$.

b) Să se determine $p \in \mathbf{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $x - 1$.

c) Să se calculeze în funcţie de $p \in \mathbf{R}$ suma $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

27. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{1}{2} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -2 \end{cases}$.

a) Să se calculeze $x_1x_2x_3$.

b) Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$, ştiind că ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ are soluţiile x_1, x_2, x_3.

c) Să se determine soluţiile sistemului.

28. Se consideră mulţimea $M = \left\{ f \in \mathbf{Z}_3[X] \,\middle|\, f = X^2 + aX + b \right\}$.

a) Să se calculeze $f(\hat{1})$ pentru $a = b = \hat{1}$.

b) Să se determine $a,b \in \mathbf{Z_3}$ pentru care $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{1}$.

c) Să se determine numărul elementelor mulţimii M.

29. În inelul $\mathbf{R}[X]$ se consideră polinomul $f = x^3 - x - 5$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Să se calculeze $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

b) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care restul împărţirii polinomului f la $X - a$ să fie -5.

c) Să se arate că valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este număr întreg.

30. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + mX + 1$, $m \in \mathbf{R}$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale.

Se defineşte $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, pentru $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Să se determine numărul real m astfel încât $x_1 = 2$.

b) Să se arate că $S_3 + S_2 + mS_1 + 3 = 0$.

c) Să se arate că pentru orice număr par $m \in \mathbf{Z}$ polinomul f nu are rădăcini raţionale.

31. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbf{R}[X], f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ şi $g = X^3 + X^2 + X + 1$.

a) Să se demonstreze că $f = X \cdot g + 1$.

b) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului g.

c) Să se calculeze $f(a)$, ştiind că a este o rădăcină a polinomului g.

32. Se consideră polinomul $f \in \mathbf{R}[X], f = X^3 - pX^2 + qX - r$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$.

a) Să se calculeze $f(0) - f(1)$.

b) Să se calculeze expresia $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$ în funcţie de p, q, r.

c) Să se arate că polinomul $g = X^3 + X^2 + X - 1$ nu are toate rădăcinile reale.

33. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbf{Z_5}[X]$, $f = \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$ şi $g = X^2 + \hat{2}X$.

a) Să se calculeze $f(\hat{1}) \cdot g(\hat{0})$.

b) Să se verifice că $f = \left(\hat{3}X + \hat{3}\right) \cdot g + \hat{2}X + \hat{2}$.

c) Să se determine numărul rădăcinilor din $\mathbf{Z}_5$ ale polinomului f.

34. Se consideră polinoamele $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$ şi $g = X^2 - 2X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$.

a) Să se calculeze diferenţa $S - S'$ unde $S = x_1 + x_2 + x_3$ şi $S' = y_1 + y_2$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la g.

c) Să se calculeze produsul $f(y_1) \cdot f(y_2)$.

35. Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^2 + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$.

a) Să se arate că polinomul f este divizibil cu $g = X^2 - 1$.

b) Să se calculeze produsul $S \cdot P$ unde $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ şi $P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$.

c) Să se calculeze suma $T = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.

36. În mulţimea polinoamelor $\mathbf{R}[X]$ se consideră polinoamele $f = X^3 + mX^2 + nX + 6$ şi $g(X) = X^2 - X - 2$.

a) Să se rezolve ecuaţia $x^2 - x - 2 = 0$.

b) Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul g.

c) Pentru $m = -4$ şi $n = 1$ să se calculeze produsul $P = f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(2007) \cdot f(2008)$.

37. Se consideră polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f(X) = (X + 1)^{2008} - (X - 1)^{2008}$ care are forma algebrică $f = a_{2008}X^{2008} + a_{2007}X^{2007} + ... + a_1X + a_0$.

a) Să se determine a_0.

b) Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr întreg par.

c) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

38. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbf{R}[X], f = X^3 - 3X + a$ şi $g = X^2 - 3X + 2$, unde $a \in \mathbf{R}$.

a) Pentru $a = 2$ să se rezolve ecuaţia $f(x) = g(x)$.

b) Să se determine rădăcinile lui f, ştiind că are o rădăcină dublă pozitivă.

c) Pentru $a = 2$ să se rezolve ecuaţia $e^{f(x)} = g\left(\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$.

39. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbf{R}$.

a) Pentru $c = 501$, să se demonstreze că $f(1) + f(-1) = 1004$.

b) Pentru $a = -2$, $b = 2$ şi $c = -1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

c) Să se demonstreze că nu există valori reale ale coeficienţilor a, b, c astfel ca f să se dividă cu polinomul $g = X^3 - X$.

40. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbf{R}$ având rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine numărul real c ştiind că $f(1) + f(-1) = 2a + 1$.

b) Ştiind că $a = -3$, $b = 1$, $c = 1$, să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

c) Să se exprime în funcţie de numerele reale a, b, c determinantul $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

41. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX + c$, cu $a,b,c \in \mathbf{R}$.
a) Să se determine numărul real c ştiind că $f(1) + f(-1) = 2008$.
b) Să se determine numerele reale a,b,c ştiind că $f(0) = f(1) = -2$ şi că una dintre rădăcinile polinomului este $x = 2$.
c) Pentru $a = -2$, $b = 1$ şi $c = -2$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f .

42. (V.92) Se consideră polinomul $f = \left(1 + X + X^2\right)^{1004}$, cu forma algebrică
$f = a_0 + a_1X + a_2X + ... + a_{2008}X^{2008}$.
a) Să se calculeze $f(-1)$.
b) Să se arate că $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2008}$ este un număr întreg impar.
c) Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul $X^2 - 1$.

43. Se consideră polinomul $f \in \mathbf{Z}_6[X]$, $f = X^3 + \left(\hat{2}a + \hat{1}\right)X + a + \hat{4}$.
a) Să se demonstreze că $b^3 = b$, oricare ar fi $b \in \mathbf{Z}_6$.
b) Să se determine $a \in \mathbf{Z}_6$, ştiind că $f(\hat{2}) = \hat{0}$.
c) Pentru $a = \hat{2}$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbf{Z}_6[X]$.

44. a) Să se determine gradul polinomului $f \in \mathbf{Z}_6[X]$, $f = \left(a^3 + \hat{5}\right)X^2 + \hat{2}aX + \hat{4}$, în funcţie de valorile lui $a \in \mathbf{Z}_6$.
b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $f \in \mathbf{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$ prin polinomul $g \in \mathbf{Z}_3[X]$, $g = X + \hat{1}$.
c) Să se determine $a,b \in \mathbf{Z}_3$, ştiind că polinomul $f \in \mathbf{Z}_3[X]$, $f = X^2 + aX + b$ are rădăcinile $\hat{1}$ şi $\hat{2}$.

45. Se consideră polinomul $f = (X+1)^{2008} + (X-1)^{2008}$ având forma algebrică
$f = a_{2008}X^{2008} + ... + a_1X + a_0$, unde $a_0, a_1, ..., a_{2008}$ sunt numere reale.
a) Să se calculeze $f(-1) + f(1)$.
b) Să se determine suma coeficienţilor polinomului f.
c) Să se determine restul împărţirii lui f la $X^2 - 1$.

46. Se consideră polinomul $f = \left(1 + X + X^2\right)^{669} \in \mathbf{Z}[X]$ cu forma algebrică
$f = a_{2007}X^{2007} + ... + a_1X + a_0$.
a) Să se calculeze $f(1) + f(-1)$.
b) Să se arate că suma $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2007}$ este un număr divizibil cu 3.
c) Să se determine restul împărţirii polinomului f la $X^2 - 1$.