Grup

Fie G-nevidã şi $*$: $G\text{x}G \to G$, $(x,y) \to x*y$, $\forall x,y \in G$.

Axiomele grupului:

G1. $(x*y)*z = x*(y*z)$ $\forall x,y,z \in G$ (asociativitatea);
G2. $\exists$ $e \in$G astfel încât $x*e = e*x = x$, $\forall x \in G$ (e element neutru);
G3. $\forall$ $x \in G$ $\exists$ $x' \in G$ astfel încât $x'*x = x*x' = e$ (x' simetricul lui x);
dacã **G4.** $x*y = y*x$, $\forall x,y \in G$ grupul este comutativ (sau abelian).

Exemple

1. $(\mathbf{Z},+)$, $(\mathbf{Q},+)$, $(\mathbf{R},+)$, $(\mathbf{C},+)$ – grupuri comutative;
2. $(\mathbf{R}_n,\oplus)$ – grupul resturilor modulo n, comutativ;
3. $(M_n(\mathbf{Z}),+)$ – grupul matricilor pãtrate de ordin n cu elemente din $\mathbf{Z}$;
4. (K, o) – grupul lui Klein (al simetriilor faţã de sistemul de coordonate), comutativ;
5. $(\sigma_n$, o) – grupul simetric de grad n (al permutãrilor de n elemente) nu este comutativ;

Definiţia 1. ***Fie (G,*) grup, H⊂G, H este <u>subgrup</u> dacã*** $\forall$ $x,y \in H \Rightarrow x*y \in H$ **şi** $\forall$ $x \in H \Rightarrow x' \in H$ ***(x' este simetricul lui x în raport cu operaţia *)***;

Fie grupurile $(G_1,\perp)$, (G_2,Δ):

Definiţia 2. f:$G_1 \to G_2$ ***se numeşte <u>morfism de grupuri</u> dacã*** $f(x\perp y)=f(x)\Delta f(y)$, $\forall x,y \in G_1$.

Definiţia 3. f:$G_1 \to G_2$ ***se numeşte <u>izomorfism de grupuri</u> dacã f este bijectivã şi*** $f(x\perp y)=f(x)\Delta f(y)$, $\forall x,y \in G_1$.

Definiţia 4. f:$G_1 \to G_2$ ***se numeşte <u>automorfism (endomorfism)</u> al grupului*** G_1***, dacã f este un izomorfism (morfism).***

Caz general

Fie pe **R** operaţia $x \circ y = axy - abx - aby + b(ab+1)$, $\forall x,y \in \mathbf{R}$. Se cere:

1. Să se arate că, $\forall x,y \in \mathbf{R}$ $x \circ y = a(x-b)(y-b)+b$;
2. Să se arate că $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(t)=a(t-b)$, este funcţie bijectivă care verifică totodată $f(x \circ y)=f(x) \cdot f(y)$, $\forall x,y \in \mathbf{R}$;
3. În cazul alegerii $a > 0$ considerând $H = (b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a < 0$ considerând $H = (-\infty;b)$, să se arate că, $\forall x,y \in H$, are loc $x \circ y \in H$;
4. În cazul alegerii $a > 0$ considerând $H = (b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a < 0$ considerând $H = (-\infty;b)$, să se arate că $f: H \to \mathbf{R}_+^*$, $f(t)=a(t-b)$, este izomorfism de la $(H;\circ)$ la $(\mathbf{R}_+^*;\cdot)$;
5. Să se arate că, $\forall x,y \in \mathbf{R}$, are loc $x \circ y = y \circ x$;
6. Să se arate că $\exists$ $x,y \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ încât $x \circ y \in \mathbf{Z}$;
7. Să se arate că $\exists$ $x,y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ încât $x \circ y \in \mathbf{Z}$;
8. Să se arate că $\forall x,y,z \in \mathbf{R}$, are loc $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$;
9. Să se arate că $\exists e \in \mathbf{R}$ încât, $\forall x \in \mathbf{R}$, verifică $x \circ e = e \circ x = x$;
10. Să se arate că, $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{b\}$, $\exists x' \in \mathbf{R} \setminus \{b\}$ încât $x \circ x' = x' \circ x = \dfrac{1}{a} + b$;
11. În cazul alegerii $a > 0$, considerând $H = (b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a<0$, considerând $H=(-\infty;b)$, să se determine ce fel de structură este $(H, \circ)$;
12. Să se rezolve ecuaţia $x \circ \left(\dfrac{1}{a}+b\right) \circ x = a \cdot A \cdot B + C$, $x \in (0,+\infty)$, unde A="an"-b-c, B="an"-b+c, $C=ac^2+b$, $\forall c \in \mathbf{Z}$;
13. Să se arate că $\exists \theta \in \mathbf{R}$ încât $\forall x \in \mathbf{R}$ verifică $x \circ \theta = \theta \circ x = \theta$;
14. Să se determine valoarea expresiei E=(-"an")∘(-"an"+1) ∘... ∘(-2) ∘(-1) ∘0 ∘1 ∘2 ∘... ∘("an"-1) ∘("an");
15. Să se arate că, $\forall x,y,z \in \mathbf{R}$, $x \circ y \circ z = a^2(x-b)(y-b)(z-b)+b$;
16. Să se rezolve în **R** ecuaţia ("an"x^2-x+b)∘(x^2-"an"$x+b$)=b;
17. Să se rezolve în **R** ecuaţia $(b-|b|+d^x) \circ (\log_d x) \circ (b-1+C^x_{\text{"an"}})=b$, $\forall d \in \mathbf{N}$, $d \geq 2$;
18. Să se arate că $\underbrace{A \circ A \circ ... \circ A}_{de\, n\, ori} = a^{n-1} \cdot (A-b)^n + b$, $\forall n \in \mathbf{N}$, A fiind un număr real liber ales, spre exemplu A = "an";
19. Să se determine cel mai mic număr $n \in \mathbf{N}^*$ cu proprietatea $(b+1) \circ (b+2) \circ (b+3) \circ ... \circ n \geq$ "an";
20. Să se rezolve în **R** ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x \circ x = a^4 \cdot A^5 + b$, A fiind un număr real liber ales, spre exemplu A = "an".

Rezolvare

1. Se verifică imediat, prin calcul direct:
   $x \circ y = a(x-b)(y-b)+b = a(xy-bx-by+b2\ )+b = axy-abx-aby+b(ab+1)$
2. Justificarea bijectivităţii funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(t)=a(t-b)$, este imediată, ca funcţie de gradul întâi. Conform cu
   $x \circ y = a(x-b)(y-b)+b \Rightarrow x \circ y - b = a(x-b)(y-b) \mid \cdot a \Rightarrow a(x \circ y - b) = a(x-b) \cdot a(y-b)$

este chiar cerinţa, respectiv $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$.

3. Fie $x\in H \Rightarrow (x-b)\geq 0$ şi $y\in H\Rightarrow (y-b)\geq 0$ şi atunci $(x-b)(y-b)\geq 0$, dar cum a este constantă nenulă şi de semn prestabilit, apartenenţa $a(x-b)(y-b)+b=x\circ y\in H$ este justificată.
4. Variaţia funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(t)=a(t-b)$, studiată anterior, arată imediat că restricţia $f:H\to \mathbf{R}^*_+$ este bijectivă. Tot din datele anterioare, este evident că H este parte stabilă a structurii $(\mathbf{R};\circ)$ (item 3) şi că are loc proprietatea de morfism +(item 2), izomorfismul fiind astfel demonstrat.
5. Comutativitatea este imediată
6. Luând $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$ şi alegând $x-b=\frac{2}{3}$ şi $y-b=\frac{3}{2}$, deoarece $b\in\mathbf{Z}$, evident $x,y\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$ şi $x\circ y=a+b\in\mathbf{Z}$.
7. Pe aceeaşi idee, alegând $x-b=\sqrt{2}-1$ şi $y-b=\sqrt{2}+1$, se va obţine $x,y\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ şi $x\circ y=a+b\in\mathbf{Z}$. Se observă că alegerea nu este unică, admiţând chiar o infinitate de posibilităţi.
8. Asociativitatea se demonstrează prin calcul
9. Din $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$ şi $x\circ e=x$ conduce la $a(x-b)(e-b)+b=x$ din care se obţine $e=\frac{1}{a}+b$
10. Dubla egalitate $x\circ x'=x'\circ x=\frac{1}{a}+b$ se reduce de fapt la $x\circ x'=\frac{1}{a}+b$ care se exprimă în forma $a(x-b)(x'-b)+b=\frac{1}{a}+b$, obţinând $x'=b+\frac{1}{a^2\left(x-b\right)}$ care este în mod evident din $\mathbf{R}\setminus\{b\}$, justificând afirmaţia din ***item 10***.
11. Structura $(H;\circ)$ se dovedeşte grup comutativ, verificarea proprietăţilor fiind asigurată de concluzii anterioare.
12. Cum $e=\frac{1}{a}+b,\ x\circ\left(\frac{1}{a}+b\right)\circ x=a\cdot A\cdot B+C$ devine $x\circ x=a\cdot A\cdot B+C$, adică $a(x-b)^2+b=a\cdot(\text{"an"}-b-c)\times(\text{"an"}-b+c)+ac^2+b$. Observând diferenţa de pătrate, din $a(x-b)^2=a\cdot[(\text{"an"}-b)^2-c^2]+ac^2$ se obţine $(x-b)^2=(\text{"an"}-b)^2$ şi în final $x=\text{"an"}$, în condiţia alegerii evidente $2b-\text{"an"}<0<\text{"an"}-b$.
13. Din $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$ se observă $q=b$ cu proprietatea menţionată, $x\circ\theta=\theta\circ x=\theta$.
14. Cum $\theta=b$ se regăseşte printre „factorii" ce compun expresia E , răspunsul la este $E=\theta=b$.
15. Se obţine prin calcul folosind $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$.
16. Ecuaţia $(\text{"an"}x^2-x+b)\circ(x^2-\text{"an"}x+b)=b$ devine $(\text{"an"}x^2-x)(x^2-\text{"an"}x)=0$ şi răspunsul va fi $x\in\left\{0;\text{"an"};\frac{1}{\text{"an"}}\right\}$.
17. Ecuaţia devine $(d^x-|b|)(\log_d x-b)\left(C^x_{\text{"an"}}-1\right)=0$, deci $x\in\left\{\log_d|b|;d^b;0;\text{"an"}\right\}$.
18. Izomorfismul conduce imediat la $x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=a^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(x_k-b\right)+b$ şi astfel identitatea $\underbrace{A\circ A\circ\ldots\circ A}_{de\ n\ ori}=a^{n-1}\left(A-b\right)^n+b$ este evidentă.
19. $(b+1)\circ(b+2)\circ(b+3)\circ\ldots\circ n=a^{n-b-1}\cdot(n-b)!+b$ şi astfel se determină imediat răspunsul.
20. $x\circ x\circ x\circ x\circ x=a^4\cdot(x-b)^5+b$ şi $a^4\cdot(x-b)^5+b=a^4\cdot A^5+b$ soluţia $x=A+b$.

Probleme rezolvate

1. Pe mulţimea numerelor reale definim operaţia $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4$ pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

b) Să se calculeze $x \circ (-4)$, unde x este număr real.

c) Ştiind că operaţia „$\circ$ ” este asociativă, să se calculeze $(-2009) \circ (-2008) \circ ... \circ 2008 \circ 2009$.

R. a) Se verifică prin calcul direct:

$(x + 4)(y + 4) - 4 = xy + 4x + 4y + 16 - 12 = xy + 4x + 4y + 12 = x \circ y$.

b) $x \circ (-4) = (x+4)(-4 + 4) - 4 = (x+4)\cdot 0 - 4 = -4,\ \forall x \in \mathbf{R}$.

c) $(-2009) \circ (-2008) \circ ... \circ 2008 \circ 2009 =$

$$=(-2009) \circ (-2008) \circ ... \circ \underbrace{\underbrace{(-5) \circ (-4)}_{=-4} \circ (-3)}_{=-4} \circ ... \circ 2008 \circ 2009 \overset{\substack{\text{din} \\ \text{punctul} \\ \text{b)}}}{=} -4.$$

2. Pe mulţimea numerelor reale definim operaţia $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

a) Să se arate că $x \circ y = 2(x - 3)(y - 3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x = 11$.

c) Ştiind că operaţia „ $\circ$ ” este asociativă, să se calculeze $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ ... \circ \sqrt{2009}$.

R. a) Prin calcul direct obţinem $2(x - 3)(y - 3) + 3 = 2(xy - 3x - 3y + 9) + 3 =$
$2xy - 6x - 6y + 9 + 3 = 2xy - 6x - 6y + 12 = x \circ y$.

b) $x \circ x = 11 \Rightarrow 2(x - 3)(x - 3) + 3 = 11 \Rightarrow 2(x-3)^2 = 8 \Rightarrow (x-3)^2 = 4 \Rightarrow x - 3 = \pm 2$. $S = \{1, 5\}$.

c) Calculăm $x \circ 3 = 2(x - 3)(3 - 3) + 3 = 2(x - 3)\cdot 0 + 3 = 3$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. În termenii compunerii $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ ... \circ \sqrt{2009}$ există $\sqrt{9} = 3$ şi din calculul precedent rezultatul calculului este 3.

3. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6$.

a) Să se arate că $x \circ y = (x - 2)(y - 2) + 2$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$.

b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

c) Ştiind că legea de compoziţie „$\circ$ ” este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei $E = (-2009) \circ (-2008) \circ \ldots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2009$.

R. a) Prin calcul direct $(x - 2)(y - 2) + 2 = xy - 2x - 2y + 4 - 2 = xy - 2x - 2y + 2 = x \circ y$.

b) $x \circ 2 = (x - 2)(2 - 2) + 2 = (x - 2)\cdot 0 + 2 = 2$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

c) $E = (-2009) \circ (-2008) \circ \ldots \circ \underbrace{(-1) \circ \underbrace{0 \circ \underbrace{1 \circ 2}_{=2}}_{=2}}_{=2} \circ \ldots \circ 2009 = 2$ conform punctului **b)**.

4. Se consideră mulţimea $G = \{A_x |\ x\in\mathbf{Z}\}$, unde matricea $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{Z}$.

a) Să se verifice că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, unde $x, y\in\mathbf{Z}$.
b) Ştiind că mulţimea G împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor formează o structură de grup, să se determine elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$.
c) Să se arate că funcţia $f : \mathbf{Z}\to G,\ f(x) = A_x$ este morfism între grupurile $(\mathbf{Z},+)$ şi $(G,\cdot)$.

R. a) $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x+y & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{x+y}$

b) Element neutru este A_e, $e\in\mathbf{Z}$ şi $A_x \cdot A_e = A_x \Rightarrow x + e = x \Rightarrow e = 0$ şi
$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

c) O funcţie $f: G_1\to G_2$ este morfism dacă $f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall x,y\in G_1$. Calculăm
$f(x+y) = A(x+y) \overset{\substack{punctul \\ a)}}{=} A(x) + A(y) = f(x) + f(y)$, $\forall x,y\in\mathbf{Z}$ şi f este izomorfism de la $\mathbf{Z}$ la G.

5. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x \circ y = (x-4)(y-4)+4$.
a) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie.
b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x \circ x = x$.
c) Să se determine două numere $a,b\in\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ astfel încât $a \circ b\in\mathbf{N}$.

R. a) Elementul neutru: există $e\in\mathbf{R}$ astfel încât oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$ să avem: $x\circ e = e\circ x = x$.
$x \circ e = (x-4)(e-4)+4 \Rightarrow (x-4)(e-4)+4 = x \Rightarrow (x-4)(e-4) = x-4 \Rightarrow e-4 = 1$
$\Rightarrow e = 5$.
b) $x \circ x \circ x = (x-4)\cdot(x-4)\cdot(x-4)+4 = (x-4)^3+4 \Rightarrow (x-4)^3+4 = x$
$\Rightarrow (x-4)^3-(x-4) = 0 \Rightarrow (x-4)\cdot[(x-4)^2-1] = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ şi $(x-4)^2-1=0 \Rightarrow (x-4)^2= 1$
$\Rightarrow x-4 = \pm 1 \Rightarrow x_2 = 3$ şi $x_3 = 5$.

c) $a,b\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z} \Rightarrow a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q}$, cu $m,n,p,q \in \mathbf{N}, n \neq 0, p \neq 0, n \neq 1, p \neq 1, (m,n) = 1, (p,q) = 1$
şi calculăm $a \circ b = \left(\frac{m}{n} - 4\right)\left(\frac{p}{q} - 4\right) + 4 = \frac{m-4n}{n} \cdot \frac{p-4q}{q} + 4$. Cum $a \circ b\in\mathbf{N}$ atunci
$\frac{m-4n}{n} \cdot \frac{p-4q}{q} \in \mathbf{N} \Rightarrow q/(m-4n)\quad n\quad (p-\quad q)$. Luăm valori pentru n şi q , n =3 şi q =5, atunci $5/(m-4\cdot 3) \Rightarrow m = 17$ şi $3/(p-4\cdot 5) \Rightarrow p = 23$. Obţinem
$a = \frac{17}{3}$ şi $b = \frac{23}{5}$, iar

$a \circ b = \left(\frac{17}{3} - 4\right)\left(\frac{23}{5} - 4\right) + 4 = \frac{17-12}{3} \cdot \frac{23-20}{5} + 4 = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} + 4 = 1 + 4 = 5 \in \mathbf{N}$. Obs. Se pot lua şi alte valori pentru n şi q.

6. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1}$.

a) Să se demonstreze că $x \circ (-x) = -1$, oricare ar fi x real.

b) Să se arate că legea de compoziţie „$\circ$ ”este asociativă.

c) Să se calculeze $(-4) \circ (-3) \circ ... \circ 3 \circ 4$.

R. a) $x \circ (-x) = \sqrt[3]{x^3 + (-x)^3 - 1} = \sqrt[3]{x^3 - x^3 - 1} = \sqrt[3]{-1} = -1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

b) Asociativitatea: $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $\forall x,y,z \in \mathbf{R}$.

Calculăm $x \circ (y \circ z) = x \circ \sqrt[3]{y^3 + z^3 - 1} = \sqrt[3]{x^3 + \left(\sqrt[3]{y^3 + z^3 - 1}\right) - 1} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 2}$ şi

$(x \circ y) \circ z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1} \circ z = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1}\right)^3 + z^3 - 1} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1 + z^3 - 1} =$,

$= \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 2}$

cei doi termeni sunt egali şi legea de compoziţie este asociativă.

c) $(-4) \circ (-3) \circ ... \circ 3 \circ 4 = (-4) \circ (-3) \circ (-2) \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ 3 \circ 4$ şi din punctul **a)** obţinem

$\underbrace{(-4) \circ 4}_{=-1} \circ \underbrace{(-3) \circ 3}_{=-1} \circ \underbrace{(-2) \circ 2}_{=-1} \circ \underbrace{(-1) \circ 1}_{=-1} \circ 0 = \underbrace{(-1) \circ (-1)}_{=\sqrt[3]{-3}} \circ \underbrace{(-1) \circ (-1)}_{=\sqrt[3]{-3}} \circ 0 =$

$= \sqrt[3]{-3} \circ \sqrt[3]{-3} \circ 0 = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{-3}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{-3}\right)^3 - 1} \circ 0 = \sqrt[3]{-7} \circ 0 = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{-7}\right)^3 + 0^3 - 1} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

7. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy + 7(x + y) + 42$.

a) Să se calculeze $2 \circ (-2)$.

b) Să se verifice că $x \circ y = (x + 7)(y + 7) - 7$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$.

c) Ştiind că legea de compoziţie „$\circ$ ” este asociativă, să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x \circ x = x$.

R. a) $2 \circ (-2) = 2 \cdot (-2) + 7(2-2) + 42 = -4+0+42 = 38$.

b) $(x + 7)(y + 7) - 7 = xy + 7y + 7x + 49 - 7 = xy + 7y + 7x + 42 = x \circ y$, $\forall x,y \in \mathbf{R}$.

c) Calculăm $x \circ x \circ x = [(x + 7)^2 - 7] \circ x = [(x + 7)^2 - 7 + 7](x + 7) - 7 = (x + 7)^3 - 7$ şi ecuaţia va fi: $(x + 7)^3 - 7 = x \Rightarrow (x + 7)^3 - (x + 7) = 0 \Rightarrow (x + 7)[(x + 7)^2 - 1] = 0 \Rightarrow$ $(x + 7) = 0$ şi $(x + 7)^2 - 1 = 0$, $x_1 = -7$ şi $(x + 7)^2 = 1 \Rightarrow x + 7 = 1$ sau $x + 7 = -1 \Rightarrow$ $x_2 = -6$ şi $x_3 = -8$.

8. Se consideră mulţimea $M = [k; +\infty) \subset \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{R}$ şi operaţia $x * y = xy - k(x + y) + k^2 + k$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine $k \in \mathbf{R}$ astfel încât $2 * 3 = 2$.

b) Pentru $k = 2$ să se rezolve în M ecuaţia $x * x = 6$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x * y \in M$.

R. a) $2 * 3 = 2 \cdot 3 - k(2 + 3) + k^2 + k = 6 - 5k + k^2 + k = k^2 - 4k + 6 \Rightarrow k^2 - 4k + 6 = 2 \Rightarrow k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k - 2)^2 = 0 \Rightarrow k = 2$.

b) $x * y = xy - 2(x + y) + 6 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 6 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ şi $x_2 = 4$.

c)

$$x, y \in M \Rightarrow \begin{cases} x \geq k \Rightarrow x - k \geq 0 \\ y \geq k \Rightarrow \underline{y - k \geq 0 \,(\cdot)} \end{cases}$$

$$(x-k)(y-k) \geq 0 \Rightarrow xy - k(x+y) + k^2 \geq 0 \Big| + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy - k(x+y) + k^2 + k \geq k \Rightarrow x * y \in M,\ \forall x, y \in M.$$

9. Se consideră mulţimea $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{R} \right\}$.

a) Să se verifice dacă $A(a) \cdot A(b) = A(2ab)$, oricare ar fi numerele reale a şi b.

b) Să se arate că $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru faţă de operaţia de înmulţire a matricelor pe M.

c) Să se determine simetricul elementului $A(1) \in M$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor pe mulţimea M.

R. a) $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R}$ $\quad A(b) = \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ & & \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$ $b \in \mathbf{R}$ şi calculăm $A(a) \cdot A(b)$:

$$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab + ab & 0 & ab + ab \\ 0 & 0 & 0 \\ ab + ab & 0 & ab + ab \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix} = A(2ab)$$

b) Calculăm $A(a) \cdot A\left(\frac{1}{2}\right) \overset{\substack{\text{punctul} \\ a)}}{=} A\left(2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}\right) = A(a)$ şi atunci $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru.

c) $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi elementul simetric este inversa matricei $A^{-1}(1)$ şi trebuie să avem $A(1) \cdot A^{-1}(1) = A\left(\frac{1}{2}\right)$. Notăm $A^{-1}(1) = A(e)$, $e \in \mathbf{R} \Rightarrow A(1) \cdot A(e) = A(2 \cdot 1 \cdot e) =$

$A(2e)$ şi $A(2e)= A\left(\frac{1}{2}\right)$, se obţine $2e=\frac{1}{2}\Rightarrow e=\frac{1}{4}$. Obţinem $A^{-1}(1) = A\left(\frac{1}{4}\right)$.

10. Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y - 3$ şi $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x \circ x = x * x$.

b) Să se determine numărul întreg a care are proprietatea că $x\circ a=3$, oricare ar fi numărul întreg x .

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x*(y+1)=4 \\ (x-y)\circ 1=5 \end{cases}$, unde $x, y\in\mathbf{Z}$.

R. a) $x \circ x = (x - 3)^2 +3$ şi $x * x = 2x - 3$, obţinem ecuaţia: $(x - 3)^2 +3 = 2x - 3 \Rightarrow$ $x^2 - 8x + 15 = 0$ care are soluţiile $x_1 = 3$ şi $x_2 = 5$, numere întregi.

b) $x\circ a=3 \Rightarrow (x - 3)(a - 3) + 3 = 3 \Rightarrow (x - 3)(a - 3) = 0$ pentru $a = 3$ şi oricare ar fi $x\in\mathbf{Z}$.

c)

$$\begin{cases} x*(y+1)=4 \\ (x-y)\circ 1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1-3=4 \\ (x-y-3)(1-3)+3=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ -2x+2y+6+3=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ -2x+2y=-4 \,|:2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ -x+y=-2 \end{cases}$$

$$/ \quad 2y=4 \Rightarrow y=2, x=4$$

şi soluţia este perechea (4;2).

11. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x*y=xy-5(x+y)+30$.

a) Să se demonstreze că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, oricare ar fi $x,y\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „*”.

c) Ştiind că legea de compoziţie „*” este asociativă, să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x=x$.

R. a) $(x-5)(y-5)+5 = xy -5y-5x +25+5= xy -5(x+y) +30 = x*y$.

b) $e \in\mathbf{R}$ este element neutru dacă $x*e = x$, oricare ar fi $x \in\mathbf{R}$. Atunci $(x-5)(e-5)+5=x\Rightarrow$ $(x-5)(e-5) -(x-5)=0 \Rightarrow (x-5)(e-6) = 0 \Rightarrow e = 6\in\mathbf{R}$. Acelaşi element neutru se obţine şi pentru $e*x=x$.

c) $x*x*x=\left[(x-5)^2+5\right]*x=\left[(x-5)^2+5-5\right](x-5)+5=(x-5)^3+5$. Ecuaţia va fi: $(x-5)^3+5=x\Rightarrow(x-5)^3-(x-5)=0\Rightarrow(x-5)\left[(x-5)^2-1\right]=0\Rightarrow$ $x-5=0$, $x_1 = 5$ şi $(x-5)^2-1=0\Rightarrow(x-5)^2=1\Rightarrow x-5=\pm1\Rightarrow x_2=6,\ x_3=4$. Soluţii $\{4,5,6\}$.

12. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie

$x * y = \left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$.

a) Să se rezolve ecuaţia $x*x=x$, unde $x \in \mathbf{R}$.
b) Să se demonstreze că legea de compoziţie „*” este asociativă.
c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „*”.

R. a) $x * x = \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2} = \left(x-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}$ şi se obţine ecuaţia:

$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2} = x \Rightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)^2-\left(x-\sqrt{2}\right)=0 \Rightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}-1\right)=0$ cu soluţiile

$x_1=\sqrt{2}$ $x_2=\sqrt{}+$.

b) Asociativitatea: $x*(y*z)=(x*y)*z$, $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$. Calculăm fiecare termen:

$$x*(y*z) = x*\left[\left(y-\sqrt{2}\right)\left(z-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right] = \left(x-\sqrt{2}\right)\left[\left(y-\sqrt{2}\right)\left(z-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-\sqrt{2}\right]+$$
$$+\sqrt{2} = \left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)\left(z-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$$

$$(x*y)*z = \left[\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right]*z = \left[\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-\sqrt{2}\right]\left(z-\sqrt{2}\right)+$$
$$+\sqrt{2} = \left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)\left(z-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$$

Cei doi termeni sunt egali şi legea de compoziţie este asociativă.

c) Elementul neutru: $\exists e\in$R astfel încât $\forall x\in$R să avem: $x*e = e*x = x$. Trebuie determinat e din egalitatea: $x*e = x$, deoarece legea de compoziţie este evident comutativă.

$$\left(x-\sqrt{2}\right)\left(e-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}=x \Rightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)\left(e-\sqrt{2}\right)-\left(x-\sqrt{2}\right)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)\left(e-\sqrt{2}-1\right)=0 \Rightarrow e-\sqrt{2}-1=0 \Rightarrow e=\sqrt{2}+1\in\mathbf{R}$$

este element neutru.

13. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y+m$, unde m este număr real.

a) Să se arate că legea de compoziţie "*" este asociativă.
b) Să se determine m astfel încât $e=-6$ să fie elementul neutru al legii "*".
c) Să se determine m astfel încât $\left(\sqrt{-3}\right)*\left(\sqrt{-2}\right)*m*\sqrt{3}=3\sqrt{2}$.

R. a) asociativitatea: $x*(y*z) = (x*y)*z$, $\forall x,y,z \in \mathbf{R}$. Calculăm fiecare termen:
$x*(y*z) = x*(y+z+m) = x+(y+z+m)+m = x+y+z+2m$
şi $(x*y)*z= (x+y+m)*z = (x+y+m)+z+m = x+y+z+2m$, cei doi termeni sunt egali şi asociativitatea este demonstrată.

b) Elementul neutru: $x*e=e*x=x$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Legea de compoziţie este evident comutativă şi atunci ajunge $x*e=x \Rightarrow x-6+m=x \Rightarrow m=6$.

c) $\left(-\sqrt{3}\right)*\left(-\sqrt{2}\right)*m*\sqrt{3}=\left[\left(-\sqrt{3}\right)*\sqrt{3}\right]*\left(-\sqrt{2}\right)*m==\left(\cancel{-\sqrt{3}}\cancel{+\sqrt{3}}+m\right)*$
$*\left(m-\sqrt{2}+m\right)=m*\left(2m-\sqrt{2}\right)=m+2m-\sqrt{2}+m=4m-\sqrt{2}$

şi se obţine: $4m-\sqrt{2}=3\sqrt{2}\Rightarrow 4m=4\sqrt{2}$ şi $m=\sqrt{2}$.

14. Pe mulţimea numerelor reale, se consideră legea de compoziţie definită prin $x\circ y=xy-x-y+2$.

a) Să se arate că legea "$\circ$ " este asociativă.

b) Să se arate că, pentru oricare $x,y\in(1,+\infty)$, rezultă că $x\circ y\in (1,+\infty)$.

c) Să se determine $a\in\mathbf{R}$ cu proprietatea că $x\circ a=a$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

R. a) asociativitatea: $x*(y*z) = (x*y)*z$, $\forall\, x,y,z \in \mathbf{R}$. Calculăm fiecare termen:
$x*(y*z) = x*(yz-y-z+2) = x(yz-y-z+2)-x-(yz-y-z+2)+2 =$
$= xyz-xy-xz+2x-x-yz+y+z-2+2=xyz-xy-xz-yz+x+y+z.$
şi $(x*y)*z= (xy-x-y+2)*z = (xy-x-y+2)z-(xy-x-y+2) -z +2=$
$=xyz-xz-yz+2z-xy+x+y-2-z+2= xyz-xy-xz-yz+x+y+z$, cei doi termeni sunt egali şi asociativitatea este demonstrată.

b) $\forall x,y\in(1,+\infty)\Rightarrow\begin{cases}x>1\Rightarrow x-1>0\\ y>1\Rightarrow y-1>0\end{cases}\Rightarrow(x-1)(y-1)>0\Rightarrow$
$\Rightarrow xy-x-y+1>0\big|+1\Rightarrow xy-x-y+2>1\Rightarrow x*y\in(1,+\infty)$.

c) $x*a=a\Rightarrow xa-x-a+2=a\Rightarrow xa-2a=x-2\Rightarrow a(x-2)=x-2\Rightarrow a=1$.

15. Pe mulţimea $\mathbf{R}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=2xy-x-y+1$.

a) Să se arate că $x*y=xy+(1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbf{R}$.

b) Să se arate că legea de compoziţie „*" este asociativă.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x* (1-x)=0$.

R. a) $xy+(1-x)(1-y)=xy+1-x-y+xy=2xy-x-y+1=x*y$, $x,y\in\mathbf{R}$

b) asociativitatea: $x*(y*z) = (x*y)*z$, $\forall\, x,y,z \in \mathbf{R}$. Calculăm fiecare termen:
$x*(y*z) =x*[2yz -y-z+1]=2x[2yz -y-z+1] -x-[2yz -y-z+1]+1=$
$=4xyz-2xy-2xz+2x-x-2yz+y+z-1+1=4xyz-2(xy+xz+yz)+x+y+z.$
şi $(x*y)*z=[2xy-x-y+1] *z=2[2xy-x-y+1]z-[2xy-x-y+1] -z+1=$
$=4xyz-2xz-2yz+2z-2xy+x+y-1-z+1=4xyz-2(xz+yz+xy)+x+y+z$, cei doi termeni sunt egali şi asociativitatea este demonstrată.

c) $x* (1-x)=0\Rightarrow x(1-x)(1-x)[1-(1-x)]=0\Rightarrow x^2(1-x)^2=0\Rightarrow x_1=0$ şi $x_2=1$.

16. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-xy+2x+2y-2$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*4=10$.

b) Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât $x*a=a*x=a$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

c) Ştiind că legea „*” este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2009}*\frac{2}{2009}*...*\frac{4018}{2009}$

R. a) $x*4=10\Rightarrow-4x+2x+2\cdot4-2=10\Rightarrow-2x=4\Rightarrow x=-2$.

b) $x*a=a\Rightarrow-xa+2x+2a-2=a\Rightarrow-xa+a=-2x+2\Rightarrow a(-x+1)=2(-x+1)\Rightarrow a=2\in\mathbf{R}$.

c) $\frac{1}{2009}*\frac{2}{2009}*...*\underbrace{\frac{4018}{2009}}_{=2}=\frac{1}{2009}*\frac{2}{2009}*...*\underbrace{\frac{4017}{2009}*\underbrace{\frac{4018}{2009}}_{=2}}_{=2}=2$ conform punctului precedent.

Probleme propuse

17. Pe mulţimea $\mathbf{Z}$ se consideră legile de compoziţie $x\perp y=x+y+1$, $x\circ y=ax+by-1$, cu $a,b\in\mathbf{Z}$ şi funcţia $f(x)=x+2$, $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$,

a) Să se demonstreze că $x\perp(-1)=(-1)\perp x=x$, oricare ar fi $x\in\mathbf{Z}$.

b) Să se determine $a,b\in\mathbf{Z}$ pentru care legea de compoziţie „ ∘ ” este asociativă.

c) Dacă $a=b=1$ să se arate că funcţia f este morfism între grupurile $(\mathbf{Z},\perp)$ şi $(\mathbf{Z},\circ)$.

18. Se consideră mulţimea $G=\left\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Z},\ a^2-2b^2=1\right\}$.

a) Să se verifice că $3+2\sqrt{2}\in G$.

b) Să se demonstreze că $x\cdot y\in G$, pentru $\forall x,y\in G$.

c) Să se arate că orice element din mulţimea G are invers în G în raport cu înmulţirea numerelor reale.

19. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=2^{x+y}$.

a) Să se calculeze $2008\circ(-2008)$.

b) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuaţia $x\circ x^2=64$.

c) Să se demonstreze că nu există $x,y,z\in\mathbf{R}$ pentru care $(x\circ y)\circ z=2^z$.

20. Pe mulţimea $\mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

a) Să se calculeze $x*0$.

b) Să se demonstreze că legea „*” este asociativă.

c) Ştiind că $x_0\in\mathbf{Q}$ şi $x_n=x_0*x_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$, să se arate că $x^*\in\mathbf{Q}$.

21. Se consideră mulţimea $G=(2,\infty)$ şi operaţia $x\circ y=xy-2(x+y)+6$, $\forall x,y\in G$.

a) Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2$, $\forall x,y\in G$.

b) Să se demonstreze că $x\circ y\in G$, pentru $\forall x,y\in G$.

c) Să se afle elementele simetrizabile ale mulţimii G în raport cu legea "∘".

22. Se consideră mulţimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ şi operaţia $x\circ y=x^{3\ln y}$, $\forall x,y\in G$.

a) Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $x\circ e=1$, unde e este baza logaritmului natural.

b) Să se demonstreze că $x\circ y\in G$, pentru $\forall x,y\in G$.

c) Să se arate că operaţia „$\circ$” este asociativă pe mulţimea G.

23. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x*y=2xy-6x-6y+21$, pentru orice $x,y\in\mathbf{R}$.

a) Să se arate că $x*y=2(x-3)(y-3)+3$ pentru orice $x,y\in\mathbf{R}$.

b) Să se rezolve în **R** ecuaţia $5x*5x=11$.

c) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea "*".

24. Fie mulţimea $G=\left\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbf{Z},\ a^2-3b^2=1\right\}$.

a) Să se verifice dacă 0 şi 1 aparţin mulţimii G.

b) Să se demonstreze că pentru orice $x, y\in G$ avem $x\cdot y\in G$.

c) Să se arate că dacă $x\in G$, atunci $\frac{1}{x}\in G$.

25. Pe **R** se consideră legea de compoziţie asociativă $x\circ y=x+y+1$.

a) Să se calculeze $2007\circ 2008$.

b) Să se rezolve în **R** inecuaţia $x\circ x^2\le 3$.

c) Fie mulţimea $A=\left\{n\in\mathbf{N}^*\mid n\ge 2 \text{ şi } C_n^0\circ C_n^1\circ C_n^2=n+6\right\}$. Să se determine numărul elementelor mulţimii A .

26. Se consideră mulţimea $G=(-1,1)$ şi legea de compoziţie $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$, $\forall x, y\in G$.

a) Să se rezolve în G ecuaţia $x*x=\dfrac{4}{5}$.

b) Să se verifice egalitatea $x*y=\dfrac{(x+1)(y+1)-(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}$, $\forall x, y\in G$.

c) Să se arate că pentru oricare $x, y\in G$ rezultă că $x*y\in G$.

27. Pe mulţimea numerelor reale definim legea de compoziţie $x\circ y=xy+3x+3y+6$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$.

a) Să se arate că $x\circ y=(x+3)(y+3)-3, \forall x,y\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine elementul neutru, ştiind că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă şi comutativă.

c) Să se determine $n\in\mathbf{N}$, $n\ge 2$ astfel încât $C_n^2\circ C_n^2=13$.

28. Pe mulţimea numerelor întregi definim legile de compoziţie $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.

a) Să se rezolve în **Z** ecuaţia $x\circ x=12$.

b) Să se arate că $1\circ(2*3)=(1\circ 2)*(1\circ 3)$.

c) Să se rezolve în mulţimea **Z**×**Z** sistemul $\begin{cases}(x-3)*y=2\\(x-y)\circ 4=10\end{cases}$.

29. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x+y+11$.

a) Să se arate că legea de compoziţie „∘” este asociativă.

b) Să se rezolve ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{de\ 6 \text{ ori x}} = 1$.

c) Să se demonstreze că ($\mathbf{Z}$,∘) este grup comutativ.

30. Pe mulţimea numerelor reale **R** se consideră legea de compoziţie $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x-2)(y-2)+2$, $\forall x,y \in \mathbf{R}$.

b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

c) Ştiind că legea de compoziţie „∘” este asociativă, să se calculeze expresia $E = (-2008) \circ (-2007) \circ \ldots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2008$.

31. Pe mulţimea $G=(-1,1)$ se consideră legea de compoziţie $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

Fie funcţia f:(-1,1)→(0,4), $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

a) Să se calculeze $\dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{2}$.

b) Să se verifice că $f(x*y) = f(x)*f(y)$, $\forall x,y \in G$.

c) Să se demonstreze că legea "*" este asociativă.

32. Pe mulţimea **R** se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy - 10(x+y) + 110$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x-10)(y-10)+10$, oricare ar fi $x,y \in \mathbf{R}$.

b) Să se calculeze $C_{20}^1 \circ C_{20}^1$

c) Să se rezolve ecuaţia $x \circ (x-1) = 10$, unde $x \in \mathbf{R}$.

33. Se consideră mulţimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbf{Z}\}$, unde matricea $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbf{Z}$.

a) Să se verifice că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, unde $x,y \in \mathbf{Z}$.

b) Să se determine elementul neutru din grupul $(G,\cdot)$.

c) Să se demonstreze că funcţia $f: \mathbf{Z} \to G$, $f(x) = A_x$ este morfism de grupuri.

34. Pe mulţimea numerelor reale **R** se consideră legea de compoziţie definită astfel $x*y = xy - x - y + 2$.

a) Să se demonstreze că $x*y = (x-1)(y-1)+1$, oricare ar fi $x,y \in \mathbf{R}$.

b) Să se demonstreze că legea „*” este asociativă.

c) Să se calculeze $\dfrac{\sqrt{1}}{2} * \dfrac{\sqrt{2}}{2} * ... * \dfrac{\sqrt{2008}}{2}$.

35. Se defineşte pe mulţimea numerelor reale legea de compoziţie asociativă $x*y = xy - 6x - 6y + 42$, pentru orice $x,y \in \mathbf{R}$.

a) Să se arate că $x*y = (x-6)(y-6)+6$, oricare ar fi $x,y \in \mathbf{R}$.

b) Să se rezolve în **R** ecuaţia $x * x * x * x = x$.

c) Să se calculeze 1* 2 * 3 * ... * 2008.

36. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie

$x*y=xy-\sqrt{2008}(x+y)+2008+\sqrt{2008}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbf{R}$.

a) Să se arate că $x*y=(x-\sqrt{2008})(y-\sqrt{2008})+\sqrt{2008}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „*” pe mulţimea **R**.

c) Ştiind că legea de compoziţie „*” este asociativă, să se calculeze $(-\sqrt{2008}) * (-\sqrt{2007}) * ... * 0 * ... * (\sqrt{2007}) * (\sqrt{2008})$.

37. Pe **Z** se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=3xy+7x+7y+14$.

a) Să se determine elementul neutru al legii "*" .

b) Să se rezolve în **R** inecuaţia $x*x\le-\frac{7}{3}$.

c) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea „*”.

38. Pe **R** se defineşte legea de compoziţie prin $x\circ y=3xy+3x+3y+2$,oricare ar fi numerele reale x şi y .

a) Să se verifice că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine perechile $(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ pentru care $(x^2-5)\circ(y^2-10)=-1$.

c) Să se determine două numere $a,b\in\mathbf{Q}-\mathbf{Z}$, astfel încât $a\circ b\in\mathbf{N}$.

39. Pe mulţimea **Z** se definesc legile de compoziţie$x*y=x+y+2$ şi respectiv $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

a) Să se demonstreze că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$.

b) Să se determine elementele neutre ale fiecăreia dintre cele două legi de compoziţie.

c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x^2 * y^2 = 7 \\ x^2 \circ y^2 = 16 \end{cases}$.

40. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x\circ y=2xy-8x-8y+36$.

a) Să se demonstreze că $x\circ y=2(x-4)(y-4)+4$, oricare ar fi $x,y\in\mathbf{R}$.

b) Să se rezolve ecuaţia $x\circ x=36$.

c) Ştiind că operaţia „ $\circ$ ” este asociativă să se calculeze $\sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ...\circ\sqrt{2008}$.

41. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie prin $x*y=3xy+3x+3y+2$.

a) Să se demonstreze că $x*y=3(x+1)(y+1)-1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine perechile $(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ pentru care $(x^2-2)*(y^2-5)=-1$.

c) Ştiind că legea de compoziţie este asociativă să se calculeze $(-2008)*(-2007)*...*(-1)*0*1*...*2007*2008$.

42. Pe **R** definim legile de compoziţie $x\circ y=x+y+3$ şi $x*y=xy-3(x+y)+12$.

a) Să se verifice că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbf{R}$.

b) Să se rezolve în **R** ecuaţia $(x\circ(x+1))+(x*(x+1))=11$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x\circ(y-1)=0 \\ (x+1)*y=x*(y+1) \end{cases}$, $x,y\in\mathbf{R}$.