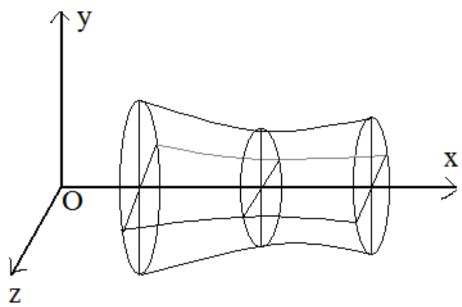
VOLUMUL CORPURILOR DE ROTAŢIE

Definiţia 1. Fie $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$ şi $f: [a,b]\to\mathbf{R}_+$. Mulţimea



$C_f=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3/\sqrt{y^2+z^2}\le f(x);\ a\le x\le b\}$ se numeşte <u>corpul de rotaţie</u> determinat de funcţia f sau corpul obţinut prin rotirea subgraficului funcţiei f în jurul axe Ox.

<u>Observaţia 1.</u> Dacă funcţia $g: [a,b]\to\mathbf{R}_+$ este constantă pe porţiuni, adică dacă există o diviziune $\Delta=(a=x_0<...<x_n=b)$ a lui $[a,b]$ astfel încât g este constantă pe fiecare interval (x_{i-1},x_i), $g(x)=c_i$, $(\forall)x\in(x_{i-1},x_i)$ atunci corpul de rotaţie determinat de g este o reuniune finită de cilindri. Volumul unui asemenea corp de rotaţie este:

$$vol(C_g)=\pi\sum_{i=1}^{n}c_i^2(x_i-x_{i-1}).$$

Definiţia 2. Se numeşte <u>mulţime cilindrică elementară</u> orice mulţime care se obţine prin rotirea subgraficului unei funcţii constante pe porţiuni în jurul axei Ox.

Cel mai mic (respectiv cel mai mare) dintre numerele pozitive $c_1,...,c_n$ va fi numit <u>raza minimă</u> (respectiv <u>raza maximă</u>) a mulţimii cilindrice elementare C_f.

Definiţia 3. Fie $f: [a,b]\to\mathbf{R}_+$ şi C_f corpul de rotaţie determinat de funcţia f. Spunem că C_f <u>are volum</u> dacă există două şiruri $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de mulţimi cilindrice elementare astfel încât:

(1.) $G_n\subset C_f\subset H_n$; $(\forall)n\in\mathbf{N}$ şi

(2.) $\lim\limits_{n\to\infty} vol(G_n)=\lim\limits_{n\to\infty} vol(H_n)$.

În acest caz volumul lui C_f se defineşte prin:

$$\mathrm{vol}(C_f)\overset{def}{=}\lim_{n\to\infty} vol(G_n)=\lim_{n\to\infty} vol(H_n).$$

<u>Observaţia 2.</u> Definiţia volumului corpului de rotaţie C_f nu depinde de şirurile $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ considerate.

Teorema 1. Dacă $f: [a,b]\to\mathbf{R}_+$ este o funcţie continuă atunci corpul de rotaţie determinat de f are volum şi

$$vol(C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Demonstraţie Fie $\Delta_n=(a=x_0^n<...<x_p^n=b)$, $n\in\mathbf{N}$ un şir de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ astfel încât:

(3.) $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$.

Notăm cu m_i^n (respectiv M_i^n) marginea inferioară (respectiv marginea superioară) a funcţiei f pe intervalul închis şi mărginit $[x^n_{i-1},x^n_i]$. Atunci există $u^n_i,v^n_i\in[x^n_{i-1},x^n_i]$ astfel încât $f(u^n_i)=m_i^n$ şi $f(v^n_i)=M_i^n$.

Pentru fiecare $n\in\mathbf{N}$ definim funcţiile constante pe porţiuni $g_n,h_n: [a,b]\to\mathbf{R}_+$,

$$g_n(x) \overset{def}{=} \begin{cases} m_i^n = f(u^n{}_i), daca \;\; x \in (x_{i-1}^n, x_i^n); (1 \le i \le p_n) \\ f(x_i), \; daca \;\; x = x_i; \quad (0 \le i \le p_n) \end{cases}$$

$$h_n(x) \overset{def}{=} \begin{cases} M_i^n = f(v^n{}_i), daca \;\; x \in (x_{i-1}^n, x_i^n); (1 \le i \le p_n) \\ f(x_i), \; daca \;\; x = x_i; \quad (0 \le i \le p_n) \end{cases}$$

Atunci corpurile de rotaţie G_n şi H_n determinate de g_n şi h_n sunt mulţimi cilindrice elementare cu proprietă]iile (1.) şi

(4.)
$$vol(G_n) = \pi \sum_{i=1}^{p_n} f^2(u_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(\pi f^2, u_i^n)$$
$$vol(H_n) = \pi \sum_{i=1}^{p_n} f^2(v_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(\pi f^2, v_i^n)$$

Funcţia f fiind continuă rezultă că πf^2 este continuă rezultă că πf^2 este integrabilă, iar conform (3.) şi (4.) avem:

(5.)
$$\pi \int_a^b f^2(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(\pi f^2, u_i^n) = \lim_{n\to\infty} vol(G_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(\pi f^2, v_i^n) = \lim_{n\to\infty} vol(H_n)$$

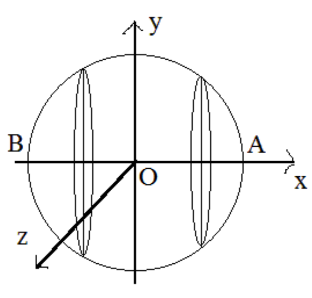
Şirurile de mulţimi cilindrice elementare $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ verifică relaţiile (1.) şi (5.) de unde rezultă că C_f are volum şi

$$vol(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

<u>Corolarul 1.</u> Dacă funcţiile f_1, f_2: $[a,b] \to \mathbf{R}_+$ sunt integrabile pe $[a,b]$ iar $f_1(x) \le f_2(x)$, $(\forall) x \in [a,b]$ atunci corpul obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a funcţiei $f_2(x)$-$f_1(x)$ are volum şi

$$vol(C_f) = \pi \int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x) \right] dx.$$

<u>Exemplul 1.</u> Să se calculeze volumul sferei de rază R.



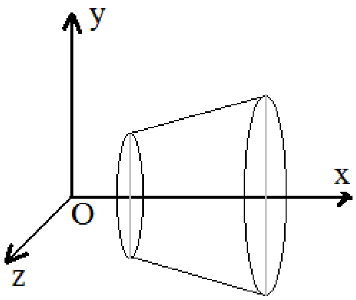
Sfera se obţine rotind semicercul de rază R în jurul axei Ox.

Ecuaţia arcului AB este $y=\sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$.

$$Vol\left(C_f\right) = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

<u>Exemplul 2.</u> Să se calculeze volumul trunchiului de con.

Trunchiul de con se obţine prin rotirea trapezului $O'ABO''$ în jurul axei Ox. Fie r şi R razele bazelor trunchiului de con. Ecua]ia dreptei AB este $y = \frac{R-r}{b-a}(x-a) + r$; iar h=b-a înălţimea conului.

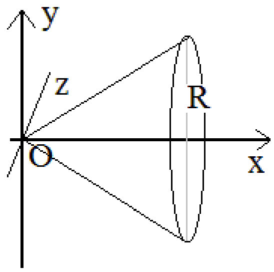


$$vol(C_f) = \pi\int_a^b \left[\frac{R-r}{b-a}(x-a)+r\right]^2 dx \overset{x-a=t}{=}$$

$$= \pi\int_a^b \left[\frac{R-r}{h}t+r\right]^2 dt =$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left[R^2+r^2+Rr\right]$$

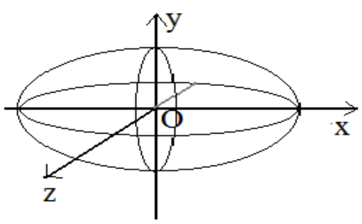
Exemplul 3. Volumul conului



Dacă luăm r=0; corpul generat prin rotație este conul circular de înăl]ime h, cercul de bază având raza R. În formula de la exemplul 2. înlocuind r=0 rezultă

$$V = \frac{\pi h R^2}{3}.$$

Exemplul 4. Volumul elipsoidului de rotație.



Se obține prin rotirea mulțimii

$E = \left\{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \,/\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$,($a$,$b$)>0 în jurul axei Ox.

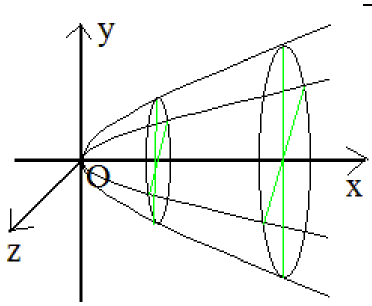
Datorită simetriei elipsoidului fa]ă de planul yOz este suficient să calculăm numai volumul jumătății situate în partea dreaptă (x>0) a planului yOz.

Fie f: $[0,a]\to\mathbf{R}$, $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$$vol(C_f) = 2\pi\int_0^a f^2(x)dx = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx =$$

$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = 2\frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}b^2a$$

Observație: Pentru a=b=r se găseşte formula volumului sferei.



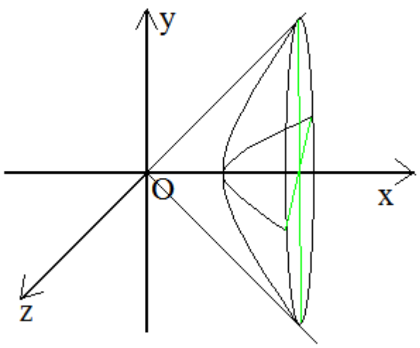
Exemplul 5. Volumul paraboliodului de rotație

Se obține prin rotirea în jurul axei Ox a funcției

$f:[0,b]\to\mathbf{R}_+$, $f(x) = \sqrt{2ax}$

$$vol(C_f) = \pi\int_0^b f^2(x)dx = 2\pi a\int_0^b xdx = 2\pi a\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^b = \pi ab^2$$

Exemplul 6. Volumul hiperboloidului de rotație.

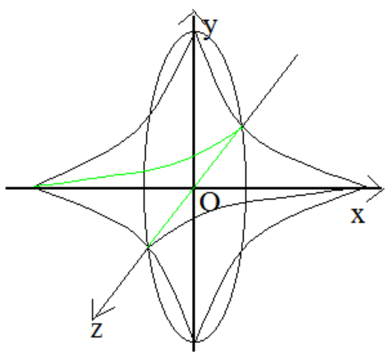


Fie f: $[a, b] \to \mathbf{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$

$$vol(C_f) = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_a^b (x^2 - a^2)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} - a^2 x\right)\Bigg|_a^b =$$

$$= \pi\left[\left(\frac{b^3}{3} - a^2 b\right) - \left(\frac{a^3}{3} - a^3\right)\right] = \frac{\pi}{3}\left(b^3 + 2a^3 - 3a^2 b\right).$$

Exemplul 7. Volumul astroidului de rotație $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (a>0)



Datorită simetriei este suficient să calculăm volumul corpului de rotație determinat de funcția:

$$f: [0, a] \to \mathbf{R}_+,\ f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

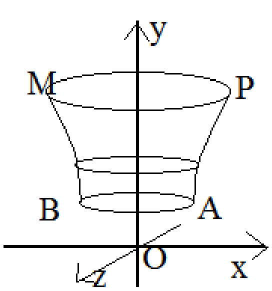
$$vol(C_f) = \pi\int_0^a f^2(x)dx = \pi\int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx =$$

$$= \pi\int_0^a \left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{3}{4}}x^{\frac{4}{3}} - x^2\right)dx =$$

$$= \pi\left(a^2 x - \frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{-a} = \frac{18}{105}\pi a^3$$

În toate exemplele date am considerat corpul obținut prin rotirea unei curbe în jurul axei Ox. Dăm un exemplu de corp obținut prin rotirea unui segment de curbă în jurul lui Oy.

Exemplul 8. Fie $0 \le a < b$, $0 \le c < d$ şi fie f: $[a, b] \to [c, d]$ bijectivă şi derivabilă.



Vom calcula volumul V al corpului de rotație obținut prin rotirea trapezului curbiliniu $ABMP$ în jurul axei Oy.

Notând cu f^{-1} inversa lui f, avem:

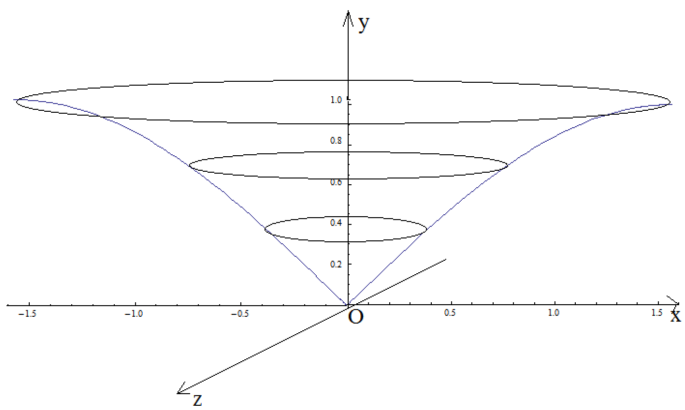
$V = \pi\int_c^d \left(f^{-1}(y)\right)^2 dy$. Integrând prin părți,

obținem: $V = \pi\left[y\ \left(f^{-1}(y)\right)^2\Big|_c^d - 2\int_c^d f^{-1}(y)(f^{-1})'(y)ydy\right] =$

$= \pi\left[b^2 d - a^2 c - 2\int_c^d f^{-1}(y)(f^{-1})'(y)ydy\right]$. Făcând schimbarea de variabilă $x=f^{-1}(y)$ obținem:

(6.) $V=\pi\left[b^2 f(b)-a^2 f(a)-2\int_a^b xf(x)dx\right]$. Am ținut cont că $dx=(f^{-1}(y))'dy$ şi $y=f(x)$.

Ca aplicație a formulei (6.) vom calcula volumul corpului generat de rotirea suprafeței limitată de Ox, $y=$**sin**x, $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ în jurul lui Oy.



Vom avea:

$$V=\pi\left[\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}-0^2\sin 0-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx\right]=$$

$$=\frac{\pi^3}{4}-2\pi$$

căci $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx=-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

Digitally signed by Virgil-Mihail Zaharia