Structuri algebrice

1. Legi de compoziţie

Def. Fie M o mulţime nevidă. O aplicaţie

$$\varphi: M\text{x}M \to M,\ (x,y) \mapsto \varphi(x,y)$$

se numeşte *lege de compoziţie (internă)* sau *operaţie algebrică binară* pe *pe mulţimea M*. Elementul $\varphi(x,y) \in M$ se numeşte *compusul lui x cu y prin* φ.

Tabla legii de compoziţie (tabla lui Cayley), când numărul elementelor mulţimii M este suficient de mic.

Parte stabilă: Fie M o mulţime nevidă înzestrată cu o lege de compoziţie „*” şi $H \subset M$, H submulţime nevidă. H este *parte stabilă* a lui M în raport cu legea de compoziţie „*”, dacă:

$$\forall x,y \in H \Rightarrow x*y \in H.$$

Asociativitatea: O lege de compoziţie „*” se numeşte *asociativă* dacă:

$$(x*y)*z = x*(y*z),\ \forall x,y,z \in M.$$

Comutativitatea: O lege de compoziţie „*” se numeşte *asociativă* dacă:

$$x*y = y*x,\ \forall x,y \in M.$$

Element neutru: Un element $e \in M$ se numeşte *element neutru* pentru legea de compoziţie „*”, dacă $\forall x \in M$ avem $x*e=e*x=x$.

Dacă o lege de compoziţie admite element neutru, atunci acesta este unic.

Element simetric: Fie M o mulţime nevidă înzestrată cu o lege de compoziţie „*” asociativă şi cu element neutru e. Un element $x \in M$ este *simetrizabil* în raport cu legea de compoziţie „*”, dacă există $x' \in M$ astfel încât $x'*x=x*x'=e$. Elementul x' se numeşte simetricul lui x.

Teoremă. Dacă $x,y \in M$ sunt simetrizabile în raport cu o lege de compoziţie „*” (asociativă şi cu element neutru), atunci $x*y$ şi x' sunt simetrizabile şi: $(x*y)' = y'*x'$; $(x')' = x$.

2. Monoid

Fie $(M,*)$, $M\text{x}M \to M$, $(x,y) \to x*y$, M-nevidã.

Axiomele monoidului:

M1. $(x*y)*z = x*(y*z)\ \forall x,y,z \in M$ (asociativitatea);

M2. $\exists\ e \in M$ astfel încât $x*e = e*x = x,\ \forall x \in M$ (e element neutru);

dacă **M3.** $x*y = y*x,\ \forall x,y \in M$ monidul este comutativ.

Ex: 1. (**N**,+), (**N**,·) sunt monoizi comutativi;

2. (F(E),o) monoid necomutativ (F(E) este mulţimea funcţiilor f:E→E, E – nevidã, o – compunerea funcţiilor).

3. Grup

Fie (G,*), GxG→G, $(x,y) \to x*y$, G-nevidã.

Axiomele grupului:

G1. $(x*y)*z = x*(y*z)\ \forall x,y,z \in$ G(asociativitatea);

G2. $\exists\ e\in G$ astfel încât $x*e = e*x = x$, $\forall x\in G$ (e element neutru);
G3. $\forall\ x\in G\ \ \exists\ x'\in G$ astfel încât $x'*x = x*x' = e$ (x' simetricul lui x);
dacă **G4.** $x*y = y*x$, $\forall x,y\in G$ grupul este comutativ (sau abelian).
Ex: 1. ($\mathbf{Z}$,+), ($\mathbf{Q}$,+), ($\mathbf{R}$,+), ($\mathbf{C}$,+) – grupuri comutative;
2. ($\mathbf{R}_n$,$\oplus$) – grupul resturilor modulo n, comutativ;
3. ($M_n(\mathbf{Z})$,+) – grupul matricilor pătrate de ordin n cu elemente din $\mathbf{Z}$;
4. (K, o) – grupul lui Klein (al simetriilor faţă de sistemul de coordonate), comutativ;
5. (σ_n, o) – grupul simetric de grad n (al permutărilor de n elemente) nu este comutativ;

Definiţia 2.1. ***Fie (G,*) grup, H$\subset$G, H este <u>subgrup</u> dacă*** $\forall\ x,y\in H \Rightarrow x*y\in H$ ***şi*** $\forall\ x\in H \Rightarrow x'\in H$ ***(x' este simetricul lui x în raport cu operaţia *)***;

Fie grupurile (G_1,$\perp$), (G_2,Δ):

Definiţia 2.2. f:$G_1\to G_2$ ***se numeşte <u>morfism de grupuri</u> dacă*** $f(x\perp y)=f(x)\Delta f(y)$, $\forall x,y\in G_1$.

Definiţia 2.3. f:$G_1\to G_2$ ***se numeşte <u>izomorfism de grupuri</u> dacă f este bijectivă şi*** $f(x\perp y)=f(x)\Delta f(y)$, $\forall x,y\in G_1$.

Definiţia 2.4. f:$G_1\to G_2$ ***se numeşte <u>automorfism (endomorfism)</u> al grupului G_1, dacă f este un izomorfism (morfism).***

4. Inel

Fie (A,+,$\bullet$), Ax$A\to A$, $(x,y)\to x+y$ şi Ax$A\to A$, $(x,y)\to x\bullet y$, A nevidă;

Definiţia 3.1. (A,+,$\bullet$) ***este <u>inel</u>*** dacă:

G. (A,+) este grup abelian;
M. (A,$\bullet$) este monoid şi
D. $\bullet$ este distributivă faţă de +:

$x\bullet(y+z) = x\bullet y + y\bullet z$
$(y+z)\bullet x = y\bullet x + y\bullet z$, $\forall x,y,z\in A$

dacă **C.** $x\bullet y = y\bullet x$ $\forall x,y\in A$, inelul este comutativ.

Exemple de inele:
1. (Z,+,$\cdot$) – inelul numerelor întregi;
2. ($Z[i]$,+, $\cdot$) – inelul întregilor lui Gauss, $\mathbf{Z}[i] = \{z = a + bi \mid a,b\in\mathbf{Z}\}$
3. (R_n,$\oplus$,$\otimes$) – inelul resturilor modulo n;
4. ($M_n(A)$,+,$\cdot$) – inelul matricelor pătratice (cu elemente din inelul A);
5. (Z_n,+,$\cdot$) – inelul claselor de resturi modulo n.

Fie inelele (A,$\perp$,*) şi (A',Δ,o):

Definiţia 3.1. f:$A\to A'$ ***se numeşte <u>izomorfism de inele</u> dacă f este bijectivă şi*** $f(x\perp y) = f(x)\Delta f(y)$, $f(x*y) = f(x)$o$f(y)$, $\forall x,y\in A$.

Definiţia 3.2. (A,+,$\bullet$) ***este <u>inel fără divizori ai lui zero</u> dacă x≠0, y≠0 implică x$\bullet$y≠0.***

Definiţia 3.3. ***Un inel comutativ cu cel puţin două elemente şi fără divizori ai lui zero se numeşte <u>domeniu integritate</u>.***

Definiţia 3.4. ***Dacă (A,+,$\cdot$) este inel, atunci (A[X],+ ,$\cdot$) este <u>inelul comutativ al polinoamelor cu coeficienţi în A</u>.***

$f\in$A[X], $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ este forma algebrică a unui polinom de nedeterminată X cu coeficienţi în A:
- dacă $a_n\neq 0$, grad $f = n$ (a_n – coeficient dominant);
- dacă $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$, $f = 0$ (polinom nul), grad $0 = -\infty$.

Proprietăţi: 1. grad $(f+g) \le \max\{\text{grad} f, \text{grad } g\}$;
2. grad $f\cdot g \le$ grad f + grad g.

Teoremă. Dacă A este domeniu de integritate atunci $A[X]$ este domeniu de integritate şi grad $f{\cdot}g$ = grad f + grad g, $\forall f,g\in A[X]$.

5. Corp

Fie $(K,+,\bullet)$, $K\mathrm{x}K\to K$, $(x,y)\to x+y$ şi $K\mathrm{x}K\to k$, $(x,y)\to x\bullet y$, K – nevidă.

Definiţia 4.1. ***(K,+,•) este <u>corp</u> dacă (K,+,•) este inel, 0≠1 şi*** $\forall x\in K$, $x\neq 0 \Rightarrow \exists\, x^{-1}\in K$, ***astfel încât*** $\boldsymbol{x\bullet x^{-1} = x^{-1}\bullet x = 1}$.

Dacă $x\bullet y = y\bullet x$, $\forall x,y\in K$, corpul este comutativ.

Exemple de corpuri:

1. $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ – corpul numerelor raţionale;
2. $(\mathbf{R},+,\cdot)$ – corpul numerelor reale;
3. $(\mathbf{C},+,\cdot)$ – corpul numerelor complexe;
4. $(\mathbf{Q}(\sqrt{d}),+,\cdot)$ – corpul numerelor pătratice ($d\in Z$, d – liber de pătrate);
5. $(\mathbf{Z}_p,+,\cdot)$ – corpul claselor de resturi modulo p ($p\in N^*$, $p>1$, p – număr prim).

Definiţia 4.2. ***Fie corpurile (K,⊥,*) şi (K’,Δ,o), f:K→K’ este izomorfism de corpuri dacă f este bijectivă,*** $f(x\perp y) = f(x)\,\Delta\, f(y)$, $f(x*y) = f(x)\ \boldsymbol{o}\ f(y)$ $\forall x,y\in\mathbf{R}$.

Caz general

Fie pe **R** operaţia $x\circ y=axy-abx-aby+b(ab+1)$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$. Se cere:

1. Să se arate că, $\forall x,y\in\mathbf{R}$ $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$;
2. Să se arate că $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(t)=a(t-b)$, este funcţie bijectivă care verifică totodată $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$;
3. În cazul alegerii $a>0$ considerând $H=(b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a<0$ considerând H $=(-\infty;b)$, să se arate că, $\forall x,y\in H$, are loc $x\circ y\in H$;
4. În cazul alegerii $a>0$ considerând H $=(b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a<0$ considerând H $=(-\infty;b)$, să se arate că $f:H\to\mathbf{R}_+^*$, $f(t)=a(t-b)$, este izomorfism de la $(H;\circ)$ la $(\mathbf{R}_+^*;\cdot)$;
5. Să se arate că, $\forall x,y\in\mathbf{R}$, are loc $x\circ y=y\circ x$;
6. Să se arate că $\exists$ $x,y\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$ încât $x\circ y\in\mathbf{Z}$;
7. Să se arate că $\exists$ $x,y\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ încât $x\circ y\in\mathbf{Z}$;
8. Să se arate că $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$, are loc $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$;
9. Să se arate că $\exists e\in\mathbf{R}$ încât, $\forall x\in\mathbf{R}$, verifică $x\circ e=e\circ x=x$;
10. Să se arate că, $\forall x\in\mathbf{R}\setminus\{b\}$, $\exists x'\in\mathbf{R}\setminus\{b\}$ încât $x\circ x'=x'\circ x=\frac{1}{a}+b$;
11. În cazul alegerii $a>0$, considerând H $=(b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a<0$, considerând H$=(-\infty;b)$, să se determine ce fel de structură este $(H,\circ)$;
12. Să se rezolve ecuaţia $x\circ\left(\frac{1}{a}+b\right)\circ x=a\cdot A\cdot B+C$, $x\in(0,+\infty)$, unde A="an"-b-c, B="an"-b+c, $C=ac^2+b$, $\forall c\in\mathbf{Z}$;
13. Să se arate că $\exists\theta\in\mathbf{R}$ încât $\forall x\in\mathbf{R}$ verifică $x\circ\theta=\theta\circ x=\theta$;
14. Să se determine valoarea expresiei E=(-"an")∘(-"an"+1) ∘… ∘(-2) ∘(-1) ∘0 ∘1 ∘2 ∘… ∘("an"-1) ∘("an");
15. Să se arate că, $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$, $x\circ y\circ z=a^2(x-b)(y-b)(z-b)+b$;
16. Să se rezolve în **R** ecuaţia ("an"x^2-x+b)∘(x^2-"an"x+b)=b;
17. Să se rezolve în **R** ecuaţia $(b-|b|+d^x)\circ(\log_d x)\circ(b-1+C^x_{\text{"an"}})=b$, $\forall d\in\mathbf{N}$, $d\geq 2$;
18. Să se arate că $\underbrace{A\circ A\circ\ldots\circ A}_{de\,n\,ori}=a^{n-1}\cdot(A-b)^n+b$, $\forall n\in\mathbf{N}$, A fiind un număr real liber ales, spre exemplu A = ”an”;
19. Să se determine cel mai mic număr $n\in\mathbf{N}^*$ cu proprietatea $(b+1)\circ(b+2)\circ(b+3)\circ\ldots\circ n\geq$"an";
20. Să se rezolve în **R** ecuaţia $x\circ x\circ x\circ x\circ x=a^4\cdot A^5+b$, A fiind un număr real liber ales, spre exemplu A = ”an”.

Rezolvare

1. Se verifică imediat, prin calcul direct:
   $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b=a(xy-bx-by+b2\ )+b=axy-abx-aby+b(ab+1)$
2. Justificarea bijectivităţii funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(t)=a(t-b)$, este imediată, ca funcţie de gradul întâi. Conform cu
   $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b\Rightarrow x\circ y-b=a(x-b)(y-b)\Big|\cdot a\Rightarrow a(x\circ y-b)=a(x-b)\cdot a(y-b)$

este chiar cerinţa, respectiv $f(x \circ y)=f(x) \cdot f(y)$.

3. Fie $x \in H \Rightarrow (x-b) \geq 0$ şi $y \in H \Rightarrow (y-b) \geq 0$ şi atunci $(x-b)(y-b) \geq 0$, dar cum a este constantă nenulă şi de semn prestabilit, apartenenţa $a(x-b)(y-b)+b=x \circ y \in H$ este justificată.
4. Variaţia funcţiei $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(t)=a(t-b)$, studiată anterior, arată imediat că restricţia $f: H \to \mathbf{R}^*_+$ este bijectivă. Tot din datele anterioare, este evident că H este parte stabilă a structurii $(\mathbf{R};\circ)$ (item 3) şi că are loc proprietatea de morfism +(item 2), izomorfismul fiind astfel demonstrat.
5. Comutativitatea este imediată
6. Luând $x \circ y=a(x-b)(y-b)+b$ şi alegând $x-b=\frac{2}{3}$ şi $y-b=\frac{3}{2}$, deoarece $b \in \mathbf{Z}$, evident $x,y \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ şi $x \circ y=a+b \in \mathbf{Z}$.
7. Pe aceeaşi idee, alegând $x-b=\sqrt{2}-1$ şi $y-b=\sqrt{2}+1$, se va obţine $x,y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ şi $x \circ y=a+b \in \mathbf{Z}$. Se observă că alegerea nu este unică, admiţând chiar o infinitate de posibilităţi.
8. Asociativitatea se demonstrează prin calcul
9. Din $x \circ y=a(x-b)(y-b)+b$ şi $x \circ e=x$ conduce la $a(x-b)(e-b)+b=x$ din care se obţine $e=\frac{1}{a}+b$
10. Dubla egalitate $x \circ x'=x' \circ x=\frac{1}{a}+b$ se reduce de fapt la $x \circ x'=\frac{1}{a}+b$ care se exprimă în forma $a(x-b)(x'-b)+b=\frac{1}{a}+b$, obţinând $x'=b+\frac{1}{a^2(x-b)}$ care este în mod evident din $\mathbf{R} \setminus \{b\}$, justificând afirmaţia din ***item 10***.
11. Structura $(H;\circ)$ se dovedeşte grup comutativ, verificarea proprietăţilor fiind asigurată de concluzii anterioare.
12. Cum $e=\frac{1}{a}+b$, $x \circ \left(\frac{1}{a}+b\right) \circ x = a \cdot A \cdot B + C$ devine $x \circ x=a \cdot A \cdot B+C$, adică $a(x-b)^2+b=a \cdot (\text{"an"}-b-c) \times (\text{"an"}-b+c)+ac^2+b$. Observând diferenţa de pătrate, din $a(x-b)^2=a \cdot [(\text{"an"}-b)^2-c^2]+ac^2$ se obţine $(x-b)^2=(\text{"an"}-b)^2$ şi în final $x=\text{"an"}$, în condiţia alegerii evidente $2b-\text{"an"}<0<\text{"an"}-b$.
13. Din $x \circ y=a(x-b)(y-b)+b$ se observă $q=b$ cu proprietatea menţionată, $x \circ \theta=\theta \circ x=\theta$.
14. Cum $\theta=b$ se regăseşte printre „factorii" ce compun expresia E , răspunsul la este $E=\theta=b$.
15. Se obţine prin calcul folosind $x \circ y=a(x-b)(y-b)+b$.
16. Ecuaţia $(\text{"an"}x^2-x+b) \circ (x^2-\text{"an"}x+b)=b$ devine $(\text{"an"}x^2-x)(x^2-\text{"an"}x)=0$ şi răspunsul va fi $x \in \left\{0;\text{"an"};\frac{1}{\text{"an"}}\right\}$.
17. Ecuaţia devine $(d^x-|b|)(\log_d x-b)\left(C^x_{\text{"an"}}-1\right)=0$, deci $x \in \left\{\log_d |b|; d^b; 0; \text{"an"}\right\}$.
18. Izomorfismul conduce imediat la $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = a^{n-1} \cdot \prod_{k=1}^{n}(x_k-b)+b$ şi astfel identitatea $\underbrace{A \circ A \circ \ldots \circ A}_{de\ n\ ori} = a^{n-1}(A-b)^n+b$ este evidentă.
19. $(b+1) \circ (b+2) \circ (b+3) \circ \ldots \circ n=a^{n-b-1} \cdot (n-b)!+b$ şi astfel se determină imediat răspunsul.
20. $x \circ x \circ x \circ x \circ x=a^4 \cdot (x-b)^5+b$ şi $a^4 \cdot (x-b)^5+b=a^4 \cdot A^5+b$ soluţia $x=A+b$.

Exemplul 1 (corespunzător alegerii a=1, b=5, c=5 şi d=2)

Fie pe **R** operaţia $x \circ y=xy-5x-5y+30, \forall x,y \in \mathbf{R}$. Se cere:

1) Să se arate că, $\forall x,y\in\mathbf{R}$, $x\circ y=(x-5)(y-5)+5$;
2) Să se arate că $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(t)=t-5$, este funcţie bijectivă, care verifică totodată $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$.
3) Considerând $H=(5;+\infty)$, să se arate că, $\forall x,y\in H$, are loc $x\circ y\in H$;
4) Considerând $H=(5;+\infty)$, să se arate că $f:H\to\mathbf{R}_+^*$, $f(t)=t-5$, este izomorfism de la $(H;\circ)$ la $(\mathbf{R}^*_+;\cdot)$;
5) Să se arate că, $\forall x,y\in\mathbf{R}$, are loc $x\circ y=y\circ x$;
6) Să se arate că $\exists\ x,y\in\mathbf{Q}\backslash\mathbf{Z}$ încât $x\circ y\in\mathbf{Z}$;
7) Să se arate că $\exists\ x,y\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ încât $x\circ y\in\mathbf{Z}$;
8) Să se arate că, $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$, are loc $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$;
9) Să se arate că $\exists e\in\mathbf{R}$ încât $\forall x\in\mathbf{R}$ verifică $x\circ e=e\circ x=x$;
10) Să se arate că, $\forall x\in\mathbf{R}\backslash\{5\}$, $\exists x'\in\mathbf{R}\backslash\{5\}$ încât $x\circ x'=x'\circ x=6$;
11) Considerând $H=(5;+\infty)$, să se determine ce fel de structură este $(H,\circ)$;
12) Să se rezolve ecuaţia $x\circ 6\circ x=1999\cdot 2009+30$, $x\in(0,+\infty)$;
13) Să se arate că $\exists\theta\in\mathbf{R}$ încât $\forall x\in\mathbf{R}$ verifică $x\circ\theta=\theta\circ x=\theta$;
14) Să se determine valoarea expresiei
$E=(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-2)\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2008\circ 2009$;
15) Să se arate că, $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$, $x\circ y\circ z=(x-5)(y-5)(z-5)+5$;
16) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuaţia $(2009x^2-x+5)\circ(x^2-2009x+5)=5$;
17) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuaţia $(2^x)\circ(\log_2 x)\circ(4+C^x_{2009})=5$;
18) Să se arate că $\underbrace{2009\circ 2009\circ\ldots\circ 2009}_{de\ 2009\ ori}=2004^{2009}+5$
19) Să se determine cel mai mic număr $n\in\mathbf{N}^*$, cu proprietatea $6\circ 7\circ 8\circ\ldots\circ n\geq 2009$;
20) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuaţia $x\circ x\circ x\circ x\circ x=2009^5+5$

Rezolvare

1. Se calculează $(x-5)(y-5)+5=xy-5x-5y+25+5=xy-5x-5y+30=x\circ y$
2. Funcţie de gradul I, bijectivă.
$f(x\circ y)=f((x-5)(y-5)+5)=(x-5)(y-5)+5-5=(x-5)(y-5)=f(x)\cdot f(y)$.
3. $\left.\begin{array}{l} x\in H\Rightarrow x>5\Rightarrow x-5>0\\ y\in H\Rightarrow y>5\Rightarrow y-5>0\end{array}\right\}\Rightarrow (x-5)(y-5)>0\,\big|+5\Rightarrow (x-5)(y-5)+5>5\quad\Rightarrow$
$x\circ y>5\ \Rightarrow\ x\circ y\in H$
4. Calculând $f'(t)=1>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(5,\infty)$ şi deci bijectivă pe $(5,\infty)$.
Morfismul este demonstrat la itemul 2.
5. $x\circ y=xy-5x-5y+30=yx-5y-5x+30=y\circ x$
6. Alegem $x-5=\dfrac{2}{3}$ şi $y-5=\dfrac{3}{2}$ obţinem $x=\dfrac{2}{3}+5=\dfrac{17}{3}\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$ şi $y=\dfrac{3}{2}+5=\dfrac{13}{2}\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$ şi calculăm
$\dfrac{17}{3}\circ\dfrac{13}{2}=\left(\dfrac{17}{3}-5\right)\left(\dfrac{13}{2}-5\right)+5=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{2}+5=1+5=6\in\mathbf{Z}$.
7. Alegem $x-5=\sqrt{2}-1$ şi $y-5=\sqrt{2}+1\ \Rightarrow\ x=\sqrt{2}+4\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ şi $y=\sqrt{2}+6\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ şi calculăm
$\left(\sqrt{2}+4\right)\circ\left(\sqrt{2}+6\right)=\left(\sqrt{2}+4-5\right)\cdot\left(\sqrt{2}+6-5\right)+5=$
$=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)+5=2-1+5=6\in\mathbf{Z}$.
8. Asociativitatea:
$(x\circ y)\circ z=[(x-5)(y-5)+5]\circ z=[(x-5)(y-5)+5-5](z-5)+5=(x-5)(y-5)(z-5)+5$
$x\circ(y\circ z)=x\circ[(y-5)(z-5)+5]=(x-5)[(y-5)(z-5)+5-5]+5=(x-5)(y-5)(z-5)+5$
9. Elementul neutru $x\circ e=x\Rightarrow xe-5x-5e+30=x\Rightarrow xe-5e=6x-30\Rightarrow e(x-5)=6(x-5)\Rightarrow$
$e=6\in H$.

10. $x\circ x'=6 \Rightarrow xx'-5x-5x'+30=6 \Rightarrow xx'-5x'=5x-24 \Rightarrow x'(x-5)=5x-24 \Rightarrow$

$$x'=\frac{5x-24}{x-5}=\frac{5x-25+1}{x-5}=\frac{5(x-5)-1}{x-5}=5-\frac{1}{x-5}\neq 5 \Rightarrow x'\in\mathbf{R}\setminus\{5\}$$

11. Din 5) H este parte stabilă, din 8) rezultă asociativitatea, din 9) elementul neutru, din 9) elementul simetric şi din 5) comutativitatea $\Rightarrow$ $(H,\circ)$ formează o structură de grup comutativ.

12. $x\circ 6\circ x=(x-5)(6-5)(x-5)+5$ şi obţinem $(x-5)^2+5=1994\cdot 2005+30 \Rightarrow$ $(x-5)^2=(1999-5)(1999+5)+25 \Rightarrow (x-5)^2=1999^2-25+25 \Rightarrow (x-5)^2=1999^2 \Rightarrow$ $x+5=\pm\ 1999 \Rightarrow x_1=1994$ şi $x_2=-2004$.

13. Determinăm pe θ astfel încât $\theta-5=0 \Rightarrow \theta=5$. Verificăm: $x\circ 5=(x+5)(\theta-5)+5=5$.

14. Conform itemului 13) $x\circ 5=5$ şi în şirul care se compune există numîrul 5, deci $E=(-2009)\circ(-2008)\circ...\circ(-2)\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ...\circ 2008\circ 2009=5$

15. Exprimarea de la acest punct s-a demonstrat la itemul 8).

16. $(2009x^2-x+5)\circ(x^2-2009x+5)=5 \Rightarrow [(2009x^2-x+5)-5][(x^2-2009x+5)-5]+5=5 \Rightarrow (2009x^2-x)(x^2-2009x)=0 \Rightarrow x(2009x-1)(x-2009)=0 \Rightarrow x\in\left\{0;\frac{1}{2009};2009\right\}$.

17. Conform punctului 15) $\Rightarrow$
$(2^x)\circ(\log_2 x)\circ(4+C^x_{2009})=(2^x-5)(\log_2 x-5)(4+C^x_{2009}-5)+5=5 \Rightarrow$
$2^x-5=0 \Rightarrow x_1=\log_2 5$
$\log_2 x-5=0 \Rightarrow x_2=2^5$
$C^x_{2009}-1=0 \Rightarrow C^x_{2009}=1 \Rightarrow x_3=0$ sau $x_4=2009$.

18. Generalizând punctul 8) se obţine

$$\underbrace{2009\circ 2009\circ...\circ 2009}_{de\ 2009\ ori}=\underbrace{(2009-5)\cdot(2009-5)\cdot...\cdot(2009-5)}_{de\ 2009\ ori}+5=2004^{2009}+5$$

19. $6\circ 7\circ 8\circ...\circ n=(5+1-5)\cdot(5+2-5)\cdot(5+3-5)\cdot...\cdot(n-5)+5=1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot(n-5)+5=(n-5)!+5$ se obţine $(n-5)!+5\geq 2009 \Rightarrow (n-5)!\geq 2004$. Ştim $6!=720$ şi $7!=5040$, deci $n=7$.

20. $x\circ x\circ x\circ x\circ x=(x-5)(x-5)(x-5)(x-5)(x-5)+5=(x-5)^5+5 \Rightarrow (x-5)^5+5=2009^5+5 \Rightarrow$ $(x-5)^5=2009^5 \Rightarrow x-5=2009 \Rightarrow x=2014$.

Exerciţii propuse

1. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x * y = x+y−6.

a) Să se rezolve în **R** ecuaţia $2^x * 4^x = 0$.

b) Pentru a∈**R**, să se calculeze $m = \underbrace{a * a * \ldots * a}_{7\ termeni}$.

c) Să se arate că numărul $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} * \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ este număr raţional.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-3x-3y+12$.

a) Să se arate că $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$, $\forall\ x, y \in$ **R**.

b) Să se calculeze $m = \underbrace{5 * 5 * \ldots * 5}_{5\ termeni}$.

c) Să se arate că numerele a = (5 *5) −3, b = (5 *5 *5) −3, c = (5 *5*5 *5) −3 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

3. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Să se rezolve în **R** ecuaţia $x*(x+1) = x + 2$.

b) Să se demonstreze că $|x + y| \le (x * y)\sqrt{2}$, pentru orice $x, y \in$ **R**.

c) Să se arate că numerele $a = (1 * 1)^2$, $b = (1 * 1 * 1)^2$, $c = (1 * 1 * 1 * 1)^2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

d) Să se arate că numărul $(1+\sqrt{7}) * (1-\sqrt{7})$ este pătratul unui număr natural.

4. Pe mulţimea $G = (1,\infty)$ se defineşte operaţia $x * y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$.

a) Să se verifice că $x * y = \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}$, $\forall x, y \in G$.

b) Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

c) Să se rezolve ecuaţia $x * 2 = 5$, unde $x \in G$.

5. Pe mulţimea G = $(0,\infty)$ se consideră legea de compoziţie $x * y = x^{\log_2 y}$.

a) Să se arate că $x * y = 2^{(\log_2 x)\cdot(\log_2 y)}$, pentru oricare $x, y \in G$.
b) Să se compare numerele $a = (2^2 * 4^2) * 2^3$ şi $b = (2^2 \cdot 2^3) * (2^2 \cdot 4^2)$
c) Să se rezolve ecuaţia $x * x = 2$, unde $x \in G$.

6. Pe mulţimea G =(0, 1) se defineşte operaţia $x * y = \dfrac{xy}{2xy + 1 - x - y}$.

a) Să se verifice că $x * y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$, pentru oricare $x, y \in G$.

b) Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

c)Să se rezolve ecuaţia $x * \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{7}$, unde $x \in G$.

7. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

a) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x * y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

8. Pe mulţimea numerelor raţionale se defineşte legea de compoziţie
$x * y = \dfrac{1}{2}(xy + x + y - 1)$. Se notează cu **H** mulţimea numerelor întregi impare.

a) Să se verifice că $x * y = \dfrac{1}{2}(x+1)(y+1) - 1$, pentru oricare $x, y \in$ **Q**.
b) Să se arate că $x * y \in$ **H**, pentru oricare $x, y \in$ **H** .
c) Să se determine elementele $x \in$ **H** cu proprietatea că există $x \in$ **H**, astfel încât $x * x = x * x = 1$.
d) Să se arate că $x * \dfrac{1}{x} \geq 1$, pentru orice $x \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$.

9. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie
$x*y = xy - 2(x + y) + m$, $m \in$ **R** .
a) Să se verifice că $x*y = (x-2)(y-2) + m - 4$, $\forall\ x,y \in$ **R** .
b) Să se determine m astfel încât $2009 * 2009 = 2007^2 + 2$.
c) Pentru $m = 6$ să se determine $a \in$ **R** astfel încât $x * a = a * x = a$, $\forall\ x \in$ **R** .
d) Pentru $m = 6$ să se calculeze $\sqrt{1} * \sqrt{2} * \ldots * \sqrt{2009}$.
e) Să se determine cea mai mică valoare a numărului m astfel încât $x * y \in [2,\infty)$, pentru orice $x,y \in [2,\infty)$

10. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie
$x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$.
a) Să se verifice că $x * y = 2(x-1)(y-1) + 1$, pentru oricare $x, y \in$ R .
b) Să se demonstreze că legea " * " este asociativă.
c) Se consideră mulţimea G =(1,∞). Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
d) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x = \dfrac{3}{2}$.