1. Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-x-2=0$.

R. Din relaţiile lui Viète, avem: $x_1+x_2=1$ şi $x_1\cdot x_2=-2$ şi obţinem:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

2. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=-x^2$. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.

R. Funcţia de gradul II are un maxim, coeficientul lui x^2 este negativ (-1), egal cu

$\text{Val.max}=-\frac{\Delta}{4a}=0$ şi atunci mulţimea valorilor funcţiei este $(-\infty,0]$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi inecuaţia $x^2-5x+5\le 1$.

R. Inecuaţia echivalentă: $x^2-5x+4\le 0$. Ecuaţia ataşată $x^2-5x+4=0$ cu soluţiile $x_1=1$, $x_2=4$. Tabelul de semn

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+ + + + + + +	0	− − − − − − −	0	+ + + + + + + + +	

Soluţia $S=[1,\ 4]\cap\mathbf{Z}=\{1,2,3,4\}$.

4. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{2+x}=x$.

R. Ecuaţie iraţională, punem condiţia de existenţă a rădăcinii pătrate $2+x\ge0\Rightarrow x\ge -2\Rightarrow x\in[-2,+\infty)$ şi $x\ge 0$. Domeniul de rezolvabilitate este $D=[0,+\infty)$. Pentru rezolvare se ridică la pătrat: $\sqrt{2+x}=x\,\Big|\,(\ )^2\Rightarrow 2+x=x^2\Rightarrow x^2-x-2=0$ cu soluţiile $x_1=-1\notin D$, $x_2=2\in D$.

Soluţia ecuaţiei $S=\{2\}$.

5. Să se determine soluţiile întregi ale inecuaţiei $(x-1)^2+x-7<0$.

R. Inecuaţia echivalentă este $x^2-x-6<0$ şi ecuaţia ataşată $x^2-x-6=0$ cu soluţiile $x_1=-2$, $x_2=3$. Tabelul se semn:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x^2-x-6		+ + + + +	0	− − − − −	0	+ + + + + + +	

Soluţia este $S=(-2,\ 3)\cap\mathbf{Z}=\{-1,0,1,2\}$.

6. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=mx^2-8x-3$, unde m este un număr real nenul. Să se determine m ştiind că valoarea maximă a funcţiei f este egală cu 5.

R. Dacă funcţia are valoare maximă atunci $m>0$ şi valoarea maximă este $y_{\max}=-\frac{\Delta}{4a}$,

$$\Delta=(-8)^2-4\cdot(-3)\cdot m=64+12m=4(16+3m)\Rightarrow$$

$$\frac{4(16+3m)}{4m}=5\Rightarrow\frac{16+3m}{m}=5\Rightarrow 16+3m=5m\Rightarrow 2m=16\Rightarrow m=8.$$

7. Să se calculeze $a^2 + b^2$, ştiind că numerele a şi b au suma egală cu 4 şi produsul egal cu 3.

R. Din $a + b = 4$ şi $a \cdot b = 3$ se obţine ecuaţia de gradul II: $x^2 - 4x + 3 = 0$ cu soluţiile $x_1=1$ şi $x_2 = 3$ sau $x_1 = 3$ şi $x_2 = 1$, soluţiile fiind a şi b. Se obţine $a^2 + b^2 = 1^2 + 3^2 = 10$.

8. Fie funcţiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$ şi $g(x) = x + 4$. Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecţie a graficelor funcţiilor f şi g.

R. Coordonatele punctului de intersecţie se obţin ca soluţie a sistemului $\begin{cases} y = x^2 - x + 1 \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow$

$x^2 - x + 1 = x + 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ cu soluţiile $x_1 = -1$ şi $x_2 = 3$, $y_1 = 3$ şi $y_2 = 7$. Punctele de intersecţie $A(-1,3)$, $B(3,7)$.

9. Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_1x_2$, ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 2x - 2 = 0$.

R. Din relaţiile lui Viète avem: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2$ şi $x_1x_2 = \frac{c}{a} = -2$ şi obţinem:

$x_1 + x_2 + x_1x_2 = 2 - 2 = 0$

10. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuaţia $x^2 + 2mx + 4m = 0$ să aibă soluţii reale.

R. Ecuaţia de gradul II are soluţii reale dacă $\Delta \geq 0$. Calculăm $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (2m)^2 - 4 \cdot 4m \cdot 1 = 4m^2 - 16m$ şi $4m^2 - 16m \geq 0$ inecuaţie de gradul II se rezolvă utilizând tabelul de semn. Aflăm rădăcinile $4m^2 - 16m = 0$, $m_1=0$ şi $m_2 = 4$.

m	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$4m^2 - 16m$	+ + + + + +		0	- - - - - -	0	+ + + + + +	

Soluţia $m \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$.

11. Să se rezolve în mulţime numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2 - x - 3} = -1$.

R. $\sqrt[3]{x^2 - x - 3} = -1 \,\Big|\, (\ )^3 \Rightarrow x^2 - x - 3 = -1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$ cu soluţiile $x_1 = -1$ şi $x_2 = 2$.

12. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0$.

R. Notăm $f(x) = y$ şi avem ecuaţia $y^2 + 2y - 3 = 0$ cu soluţiile $y_1 = 1$ şi $y_2 = -3$. Revenim la notaţie şi se obţine $2x - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$; $2x - 1 = -3 \Rightarrow x_2 = -1$.

13. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 25$. Să se calculeze $f(-5) \cdot f(-4) \cdot \ldots \cdot f(0) \cdot \ldots \cdot f(4) \cdot f(5)$.

R. Din $f(-5) = 0 \Rightarrow f(-5) \cdot f(-4) \cdot \ldots \cdot f(0) \cdot \ldots \cdot f(4) \cdot f(5) = 0$.

14. Să se determine soluţiile reale ale inecuaţiei $\frac{2x + 3}{x^2 + x + 1} \geq 1$.

R. $\dfrac{2x+3}{x^2+x+1}\geq 1\Rightarrow \dfrac{2x+3}{x^2+x+1}-1\geq 0\Rightarrow \dfrac{2x+3-x^2-x-1}{x^2+x+1}\geq 0\Rightarrow \dfrac{-x^2+x+2}{x^2+x+1}\geq 0$. Pentru rezolvare facem tabelul de semn:

$-x^2+x+2=0\Rightarrow\ \Delta=1-4\cdot(-1)\cdot 2=9$, $x_1=-1$, $x_2=2$

$x^2+x+1=0$, $\Delta=-3$, ecuaţia nu are soluţii reale.

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$
$-x^2+x+2$	− − − − − − 0 + + + + + 0 − − − − − −
x^2+x+1	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +
$\dfrac{-x^2+x+2}{x^2+x+1}$	− − − − − − 0 + + + + + 0 − − − − − −

$S=[-1, 2]$.

15. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3x^2-3x+1$ şi $g(x)=x-1$. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $f(x)=-g(x)$.

R. Din $f(x)=-g(x)\Rightarrow 3x^2-3x+1=-x+1\Rightarrow 3x^2-2x=0\Rightarrow\ x_1=0$ şi $x_2=\dfrac{2}{3}$.

16. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ ştiind că parabola asociată funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-mx+m-1$ este tangentă axei Ox.

R. Parabola este tangentă axei Ox dacă vârful parabolei este pe axa Ox, adică

$$-\frac{\Delta}{4a}=0\Rightarrow -\frac{(-m)^2-4\cdot 1\cdot(m-1)}{4}=0\Rightarrow m^2-4m+4=0\Rightarrow (m-2)^2=0\Rightarrow m=2.$$

17. Să se demonstreze că dacă $a\in\mathbf{R}^*$, atunci ecuaţia $ax^2-(2a+1)x+a+1=0$ are două soluţii reale distincte.

R. Ecuaţia are două soluţii reale distincte dacă $\Delta>0$.

$$\Delta=\left[-(2a+1)\right]^2-4(a+1)\cdot a=\cancel{4a^2}\ \cancel{+4a}+1\cancel{-4a^2}\ \cancel{-4a}=1>0,\ \forall a\in\mathbf{R}$$

18. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-11x+30$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(6)$.

R. Din $f(6)=0\ \Rightarrow\ f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(6)=0$.

19. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+5x+m+6$. Să se determine valorile reale ale lui m ştiind că $f(x)\geq 0$, pentru oricare $x\in\mathbf{R}$.

R. $f(x)\geq 0$ dacă $-\dfrac{\Delta}{4a}\geq 0\Rightarrow -\dfrac{5^2-4\cdot 1\cdot(m+6)}{4\cdot 1}\geq 0\Rightarrow -25+4m+24\geq 0\Rightarrow 4m\geq 1\Rightarrow$

$$=m\geq\frac{1}{4}\Rightarrow m\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right).$$

20. Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții x_1 şi x_2 verifică relațiile $x_1 + x_2 = 1$ şi $x_1x_2 = -2$.

R. Scrierea ecuației de gradul II când se cunosc suma şi produsul rădăcinilor este: $x^2 - Sx + P = 0$, unde $S = x_1 + x_2 = 1$ şi $P = x_1x_2 = -2$. Se obține $x^2 - x - 2 = 0$.

21. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$. Să se calculeze $f(f(0)) - f(2)$.

R. Din $f(0) = 2 \Rightarrow f(f(0)) = f(2)$ şi $f(f(0)) - f(2) = f(2) - f(2) = 0$.

22. Să se demonstreze că pentru orice număr real a, ecuația de gradul al doilea $x^2 - (2\sin a)x + 1 - \cos^2 a = 0$ admite soluții reale egale.

R. Calculăm discriminantul ecuației

$\Delta = \left[-(2\sin a)^2\right] - 4\left(1-\cos^2 a\right) = 4\sin^2 a - 4 + 4\cos^2 = 4\left(\sin^2 a + \cos^2 a\right) - 4 = 4 - 4 = 0$ şi atunci ecuația are două soluții reale egale.

23. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2009)$

R. Din $f(1) = 0 \Rightarrow f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2009) = 0$.

24. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-5} = 2$.

R. Condiția $x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \in [5, +\infty)$. Rezolvăm ecuația prin ridicare la pătrat:

$\left(\sqrt{x-5}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow x - 5 = 4 \Rightarrow x = 9$.

25. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2$.

R. Condiții $x^2 - x - 2 \geq 0$, tabelul de semn

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+ + + +	+ + + +	0	– – – – – –	0	+ + + +	+ + +

$x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$.

Pentru rezolvare ridicăm la pătrat: $\left(\sqrt{x^2 - x - 2}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 4$ $x^2 - x - 6 = 0$ cu soluțiile $x_1 = -2$ şi $x_2 = 3$ şi $S = \{-2, 3\}$.

26. Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții x_1 şi x_2 verifică simultan relațiile $x_1 + x_2 = 2$ şi $x_1 \cdot x_2 = -3$.

R. Ecuația de gradul al II-lea va fi: $x^2 - Sx + P = 0$, unde $S = x_1 + x_2 = 2$ şi $P = x_1 \cdot x_2 = -3$. Se obține ecuația $x^2 - 2x - 3 = 0$.

27. Să se determine $m \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$, ştiind că abscisa punctului de minim al graficului funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x) = (m-1)x^2 - (m-2)x + 1$ este egală cu 2.

R. Abscisa punctului de minim este $x_v = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow -\dfrac{-(m-2)}{2(m-1)} = 2$, $m - 2 = 4m - 4$,

$3m = 2,\ m = \frac{2}{3}$.

28. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{x+1} = 5 - x$.

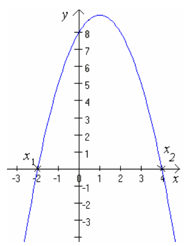
R. Condiţii: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1,5]$

Rezolvăm ecuaţia prin ridicare la pătrat:

$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (5-x)^2 \Rightarrow x+1 = 25 - 10x + x^2 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$ cu soluţiile $x_1 = 3 \in [-1,5]$ şi $x_2 = 8 \notin [-1,5]$. Soluţia ecuaţiei este $x = 3$.

29. Să se calculeze distanţa dintre punctele de intersecţie ale graficului funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ cu axa Ox.

R.



Punctele de intersecţie ale graficului funcţiei cu axele de coordonate este $|x_2 - x_1|$, unde x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $f(x) = 0$.

$-x^2 + 2x + 8 = 0$ cu soluţiile $x_1 = -2$ şi $x_2 = 4$.
Distanţa este $|x_2 - x_1| = |4 - (-2)| = |6| = 6$.

30. Să se calculeze distanţa dintre punctele de intersecţie ale graficului funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 8x + 7$ cu axa Ox.

R. Rezolvăm ecuaţia $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ şi $x_2 = 7$ iar distanţa dintre puncte este $|x_2 - x_1| = |7 - 1| = 6$.

31. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie a dreptei de ecuaţie $y = -4$ cu graficul funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

R. Din $f(x) = y \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = -4 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ şi punctul de intersecţie este $A(3, -4)$.

32. Să se demonstreze că ecuaţia $x^2 - 2x + 1 + a^2 = 0$ nu admite soluţii reale, oricare ar fi $a \in \mathbf{R}^*$.

R. Dacă $\Delta < 0$ ecuaţia nu are soluţii reale.

$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot\left(1 + a^2\right) = 4 - 4 - 4a^2 = -4a^2 < 0, \forall a \in \mathbf{R}^*$ şi ecuaţia nu are soluţii reale.

33. Să se determine valorile reale ale lui m, ştiind că valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - mx + m - 1$ este egală cu $\frac{1}{4}$.

R. Valoarea minimă a funcţiei este vârful parabolei,

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{m^2 - 4m + 4}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow (m-2)^2 = 1 \Rightarrow m - 2 = \pm 1 \Rightarrow m \in \{1,3\}.$$

34. Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{7-x}=1$.

R. Condiția $7-x\geq 0 \Rightarrow x \leq 7$. Pentru rezolvare redicăm la pătrat şi se obține: $7-x=1$ $\Rightarrow x=6$.

35. Să se determine $m\in\mathbf{R}$, ştiind că soluțiile x_1,x_2 ale ecuației $x^2-(2m+1)x+3m=0$ verifică relația $x_1+x_2+x_1x_2=11$.

R. Din relațiile lui Viète avem: $x_1+x_2=2m+1$ iar $x_1x_2=3m$ şi se obține $2m+1+3m=11$ $\Rightarrow 5m=10 \Rightarrow m=2$.

36. Să se determine elementele mulțimii $A=\{x\in\mathbf{N}|\ |2x-1|\leq 1\}$.

R. $|2x-1|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq 2x-1\leq 1\big|+1 \Rightarrow 0\leq 2x\leq 2\big|:2 \Rightarrow 0\leq x\leq 1 \Rightarrow x\in[0,1]\cap\mathbf{N}=\{0,1\}=A$.

37. Se consideră ecuația $x^2+3x-5=0$ cu soluțiile x_1 şi x_2. Să se calculeze $x_1^2+x_2^2$.

R. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. Din relațiile lui Viète avem: $x_1+x_2=-3$ şi $x_1x_2=-5$ şi se obține $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-3)^2-2\cdot(-5)=9+10=19$.

38. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-25}=12$.

R. Condiția: $x^2-25\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$. Pentru rezolvare se ridică la pătrat: $x^2-25=144 \Rightarrow x^2=169 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 13$, soluții.

39. Să se rezolve sistemul $\begin{cases}2x-y=3\\ x^2+2x-7=y\end{cases}$, unde $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$.

R. Din prima ecuație $y=2x-3$ şi înlocuim în ecuația a doua: $x^2+2x-7=2x-3 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 2$. Aflăm y: $x_1=-2 \Rightarrow y_1=2\cdot(-2)-3=-7$ şi $x_2=2$ $\Rightarrow y_2=2\cdot 2-3=1$. $S=\{(-2,-7),(2,1)\}$.

40. Să se arate că $(x-1)(x-2)>x-3$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

R. $(x-1)(x-2)>x-3 \Rightarrow x^2-2x-x+2-x+3=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1>0$, ca sumă de numere poyitive, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

41. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x+3}=x$.

R. Condiții: $2x+3\geq 0$ şi $x\geq 0$, se obține $x\in[0,+\infty)$. Rezolvare:
$\sqrt{2x+3}=x\big|(\ )^2 \Rightarrow 2x+3=x^2 \Rightarrow \Rightarrow x^2-2x-3=0,\ \Delta=16,\ x_1=-1,\ x_2=3$.
Soluția $x=3>0$.