Progresii

1. Progresii aritmetice

Definiția. Se numeşte progresie aritmeticã un şir de numere $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ în care fiecare termen, începând cu a_2, se obține din cel precedent prin adãugarea unui numãr constant numit rația progresiei. Se noteazã $\div a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$

Dacã a_1 este primul termen, a_n cel de-al n-lea termen (termenul general), r rația, n numãrul termenilor şi S_n suma celor n termeni, atunci avem:

$a_n = a_{n-1} + r, n \geq 2$ definiție

$a_n = a_1 + (n-1)r, n \geq 2$ termenul general

$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, k \geq 2$ media aritmeticã

$r = a_{k+1} - a_k, k \geq 1$ obținerea rației

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} n$$

Termenii echidistanți de extremi. Într-o progresie aritmeticã suma termenilor echidistanți de extremi este egalã cu suma termenilor extremi: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

Observație. Dacã numãrul termenilor este impar ($n = 2m + 1$), atunci existã un termen în mijloc, a_{m+1}, astfel încât $2a_{m+1} = a_1 + a_{2m+1}$.

Condiția necesarã şi suficientã pentru ca trei termeni $a,b,c,$ luate în aceastã ordine, sã formeze o progresie aritmeticã, este sã avem $2b = a + c$.

2. Progresii geometrice

Definiția. Se numeşte progresie geometricã un şir de numere $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ în care fiecare termen, începând cu b_2, se obține din cel precedent prin înmulțirea acestuia cu un acelaşi numãr q ($q \neq 0$) numit rație. Se noteazã $\div\!\!\div b_1, b_2, b_3, \ldots b_n, \ldots$

Dacã b_1 este primul termen, b_n cel de-al n-lea termen (termenul general), q rația, n numãrul termenilor şi S_n suma celor n termeni, atunci avem:

$b_n = qb_{n-1}, n \geq 2$ definiție

$b_n = b_1 q^{n-1}, n \geq 2$ termenul general

$q = \frac{b_{k+1}}{b_k}, k \geq 1$ obținerea rației

$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}, k \geq 2$ media geometricã

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n, S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}; \; S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}, q \neq 1$$

Termeni echidistanţi de extremi. Într-o progresie geometrică, produsul a doi termeni echidistanţi de extremi este egal cu produsul termenilor extremi:

$$b_p b_{n-p+1} = b_1 b_n.$$

Observaţie. Dacă numărul termenilor este impar ($n=2m+1$) atunci există un termen la mijloc, b_{m+1}, astfel încât $b_{m+1}^2 = b_1 b_{2m+1}$.

Condiţia necesară şi suficientă ca trei numere a,b,c, luate în această ordine, să formeze o progresie geometrică este să avem $b^2 = ac$.

Probleme propuse

1. Să se determine al zecelea termen al şirului 1, 7, 13, 19, ...

2. Să se calculeze suma primilor 5 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 1$ şi $a_2 = 3$.

3. Să se determine al patrulea termen al unei progresii geometrice, ştiind că raţia este egală cu $\frac{1}{3}$ şi primul termen este 27.

4. Să se calculeze suma $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}$.

5. Să se determine numărul real x, ştiind că $x-3$, 4, $x+3$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

6. Să se calculeze suma $1+3+5+...+19$.

7. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3 = 5$ şi $a_6 = 11$. Să se calculeze a_9 .

8. Să se calculeze suma $1+2+2^2+2^3+...+2^7$.

9. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 1$şi $a_5 = 13$. Să se calculeze a_{2009}.

10. Să se determine raţia unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_{10}-a_2=16$.

11. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 2$ şi $a_2 = 4$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.

12. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_1 = 2$ şi $b_2 = 6$. Să se calculeze b_5.

13. Să se determine numărul real x , ştiind că şirul 1, $2x+1$, 9,13,… este progresie aritmetică.

14. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 6$ şi $a_2 = 5$. Să se calculeze a_7.

15. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_2 = 5$ şi $r = 3$. Să se calculeze a_8.

16. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_1 = 1$ şi $b_2 = 3$. Să se calculeze b_4 .

17. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 7$ şi $a_7 = 37$. Să se calculeze suma primilor zece termeni ai progresiei.

18. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 3$ şi $a_3 = 7$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.

19. Să se calculeze suma $1+11+21+31+...+111$.

20. Să se determine numărul real x ştiind că numerele $x + 1$, $2x - 3$ şi $x - 3$ sunt termini consecutivi ai unei progresii aritmetice.

21. Să se determine suma primilor 6 termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 2$ şi $a_2 = 5$.

22. Să se determine valorile reale ale numărului x ştiind că numerele $5 - x$; $x + 7$ şi $3x + 11$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

23. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice cu raţia 4, ştiind că suma primilor doi termeni este 10.

24. Într-o progresie geometrică, al doilea termen este 3 şi raportul dintre primul şi al patrulea termen este $\frac{1}{8}$. Să se determine primul termen al progresiei.

25. Să se determine suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, ştiind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8, iar diferenţa dintre al doilea termen şi primul termen este egală cu 4.

26. Să se calculeze al cincilea termen al unei progresii aritmetice, ştiind că primul termen al progresiei este 7 şi al doilea termen este 9.

27. Să se determine raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 3$ şi $b_2 - b1 = 3$.

28. Să se determine numărul real x, ştiind că şirul $1, x, x+2, 7, \ldots$ este progresie aritmetică.

29. Să se determine $x\in\mathbf{R}$, ştiind că numerele $x-1$, $x+1$ şi $2x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

30. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = -2x+3$. Să se arate că numerele $f(1)$, $f(0)$ şi $f(-3)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

31. Să se determine al patrulea termen al unei progresii geometrice care are primul termen egal cu 16 şi raţia $\frac{1}{2}$.

32. Să se determine termenul al patrulea al unei progresii aritmetice, ştiind că primul termen este 2 şi raţia este 3.

33. Să se determine raţia unei progresii aritmetice în care primul termen este 10 şi al patrulea termen este 19.

34. Să se calculeze suma $1+2+2^2+\ldots+2^6$.

35. Să se calculeze suma $S=1+5+9+\ldots+25$.

36. Să se calculeze produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, care are primul termen $\sqrt{2}$ şi raţia egală cu $-\sqrt{2}$.

37. Să se determine numărul real x ştiind că numerele $x-1$, $2x-2$ şi $x+3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

38. Să se determine numărul real x ştiind că numerele $x-1$, $x+1$ şi $2x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

39. Să se determine produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice ştiind că primul termen este egal cu 1 şi raţia este egală cu -2.

40. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+5$. Să se calculeze $f(2)+f(2^2)+\ldots+f(2^5)$.

41. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+3$. Să se calculeze $f(2)+f(2^2)+\ldots+f(2^7)$.

42. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+\ldots+f(4)$.