

Progresii aritmetice

Fie șirul de numere : 1,3,5,7,9,11.... Observăm că fiecare termen al șirului începând cu al doilea se obține din termenul precedent lui prin adăugarea aceluiași număr și anume 2. Adică dacă notăm cu $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ termenii șirului de mai sus observăm că:

$$a_1=1; a_2= a_1+ 2=1+2=3; a_3= a_2+2=3+2=5; a_4= a_3+2=5+2=7; \text{ ș.a.m.d.}$$

Def. Un șir de numere în care fiecare termen începând cu al doilea se obține din cel precedent lui prin adăugarea aceluiași număr (nenul) se numește progresie aritmetică.

Cu alte cuvinte , un șir de numere $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ este o progresie aritmetică dacă , pentru orice $k \geq 1$, avem

$$\boxed{a_{k+1} = a_k + r} ,$$

unde r este un număr constant pentru șirul dat. Constanta r se numește **rația progresiei aritmetice**.

Așadar dându-i lui k pe rând valorile $1, 2, 3, \dots, n$ în relația de mai sus obținem

$$a_2 = a_1 + (2-1) r,$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2 r = a_1 + (3-1) r,$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2 r + r = a_1 + 3 r = a_1 + (3-1) r$$

.....

$$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-2) r + r = a_1 + (n-1) r, \dots, \text{ așadar}$$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r}, n \geq 1,$$

numită **formula termenului general** a unei progresii aritmetice, prin urmare **o progresie aritmetică este complet determinată dacă se cunosc primul termen a_1 și rația r .**

Pe de altă parte din relația $a_{k+1} = a_k + r \Rightarrow r = a_{k+1} - a_k$, și deci pentru $k=1, 2, \dots, n, \dots$ avem

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{n+1} - a_n = \dots$$

Ex. rezolvat:

1.Să se scrie primii patru termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ dacă:

a) $a_1 = 5$ și $r = 3$ b) $a_1 = 2$ și $a_2 = 5$ c) $a_2 = 2$ și $a_3 = 7$

Rezolvare : a) $a_2 = a_1 + r = 5 + 3 = 8$; $a_3 = a_2 + r = 8 + 3 = 11$; $a_4 = a_3 + r = 11 + 3 = 14$;

b) $a_2 = a_1 + r \Rightarrow r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 5 - 2 = 3$; $a_3 = a_2 + r = 5 + 3 = 8$; $a_4 = a_3 + r = 8 + 3 = 11$;

c) $a_4 = a_3 + r \Rightarrow r = a_3 - a_2 \Rightarrow r = 7 - 2 = 5$; atunci $a_1 = a_2 - r = 2 - 5 = -3$; $a_4 = a_3 + r = 7 + 5 = 12$.

Ex. date spre rezolvare:

1.Să se scrie primii cinci termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ dacă:

a) $a_1 = 5$ și $r = 3$ b) $a_1 = 2$ și $a_2 = 5$ c) $a_2 = 2$ și $a_3 = 7$ d) $a_1 = -5$ și $r = -2$ e) $a_3 = 2$ și $a_4 = 7$

2.Să se determine primii termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ dată astfel:

a) $a_1, a_2, 16, 25, 34$ b) $a_1, a_2, -10, -13, -16$ c) $a_1, a_2, -11, -7, -3$ d) $a_1, a_2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

Ex. rezolvat:

1.Dacă se cunosc doi termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_3 = 5$ și $a_7 = 21$ să se calculeze

$$a_8, a_{33}, a_{2011} .$$

Rezolvare : Voi rezolva problema prin două metode. Având în vedere că dacă cunosc primul termen al unei progresii aritmetice precum și rația acestuia pot determina orice termen al progresiei , voi încerca așadar să îl determin pe a_1 și r .

Cazul I. $a_7 = a_6 + r = a_5 + 2r = a_4 + 3r = a_3 + 4r \Rightarrow$

$$21 = 5 + 4r \Rightarrow 4r = 16 \Rightarrow \boxed{r = 4} ;$$

$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r \Rightarrow 5 = a_1 + 8 \Rightarrow \boxed{a_1 = -3}$ folosind acum formula termenului general $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ obținem

$$a_8 = a_7 + r = 21 + 4 = 25;$$

$$a_{33} = a_1 + (33-1) \cdot r = -3 + 32 \cdot 4 = 125,$$

$$a_{2011} = a_1 + (2011-1) \cdot r = -3 + 2010 \cdot 4 = 8037.$$

Cazul II. Voi scrie fiecare termen al progresiei aritmetice în funcție de primul termen și de rație folosind formula termenului general, iar cu cele două relații obținute voi face un sistem format din două ecuații și două necunoscute (a_1 și r) pe care baza cărora voi determina apoi toți termenii progresiei.

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2r \\ a_7 = a_1 + 6r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2r = 5 \quad | \cdot (-1) \\ a_1 + 6r = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_1 - 2r = -5 \\ a_1 + 6r = 21 \end{cases}$$

$$/ \quad 4r = 16 \Rightarrow r = 4 \text{ și } a_1 + 8 = 5 \Rightarrow a_1 = -3$$

folosind acum formula termenului general $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ obținem

$$a_8 = a_7 + r = 21 + 4 = 25;$$

$$a_{33} = a_1 + (33-1) \cdot r = -3 + 32 \cdot 4 = 125,$$

$$a_{2011} = a_1 + (2011-1) \cdot r = -3 + 2010 \cdot 4 = 8037.$$

Ex. date spre rezolvare:

3. Dacă se cunosc doi termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$:

a) $a_3 = 7$ și $a_7 = 15$ să se calculeze $a_{28}, a_{333}, a_{2011}$.

b) $c_8 = 40$ și $c_{20} = -20$ să se calculeze c_{16}, c_3, c_{200} .

4. Într-o progresie aritmetică se cunosc a_1 și r . Folosind formula termenului general să se determine a_n dacă:

a) $a_1 = 5, r = 5, n = 12$

b) $a_1 = -2, r = 0,5, n = 12$

c) $a_1 = -2,5, r = -2, n = 50$

d) $a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{3}{2}, n = 73$.

5. Să se găsească primul termen a_1 al unei progresii aritmetice dacă:

a) $a_{10} = 131$ și $r = 12$

b) $a_{200} = 0$ și $r = -3$

c) $a_{52} = -125$ și $r = -5$

d) $a_{44} = 13,5, r = 0,5$.

Spunem că termenii $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sunt în progresie aritmetică dacă ei sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice

Exemplu : 3,6,9,12,.....; 5,10, 15,20,25,....; 2,4,6,8,..... ; sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice

Contraexemplu : 3,9,12,6, 18,15 sau 5,10,25,20,15 deși au aceeași termeni ca șirurile de mai sus ele nu formează o progresie aritmetică neavând rație. ($3 + 6 = 9$ pe când $9 + 6 \neq 12$, vezi definiția).

Teoremă : *Un șir de numere $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ formează o progresie aritmetică dacă orice termen începând cu al doilea este medie aritmetică a termenilor vecini lui , adică $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$; $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$, \dots , $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$*

Rețineți : Pentru a arăta că un șir dat printr-o formulă generală $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \dots$ formează o progresie aritmetică trebuie arătat că $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall n \geq 2$.

Ex. rezolvat : Să se demonstreze că șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ dat prin formula generală $y_n = 3n + 5$ formează o progresie aritmetică și apoi să se de determine primul termen și rația.

Rezolvare : Conform celor de mai sus arăt că $y_n = \frac{y_{n-1} + y_{n+1}}{2}$.

Cum $y_n = 3n + 5 \Rightarrow y_{n-1} = 3(n-1) + 5 = 3n - 3 + 5 = 3n + 2$ și $y_{n+1} = 3(n+1) + 5 \Rightarrow y_{n+1} = 3n + 3 + 5 = 3n + 8$.

Așadar $\frac{y_{n-1} + y_{n+1}}{2} = \frac{3n + 2 + 3n + 8}{2} = \frac{6n + 10}{2} = \frac{2(3n + 5)}{2} = 3n + 5 = y_n$, $\forall n \geq 2$

Se obține ușor acum că $y_1 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$, $y_2 = 3 \cdot 2 + 5 = 11$ și deci $r = y_2 - y_1 = 11 - 8 = 3$, q.e.d.

Ex. propus : Să se demonstreze că șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$, $(y_n)_{n \geq 1}$ și $(z_n)_{n \geq 1}$ date prin formulele generale

$$\begin{aligned} x_n &= 8n - 3, \\ y_n &= -4n + 2 \text{ și} \\ z_n &= 9 - 4n \end{aligned}$$

formează progresii aritmetice și apoi să se de determine primul termen și rația.

Retineți :

trei numere x, y, z sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice dacă $y = \frac{x+z}{2}$

Ex. rezolvat : Să se determine $x \in \mathbf{R}$ știind că x, x^2 și 3 sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Soluție : Numerele x, x^2 și 1 fiind trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice conform relației de mai sus avem

$$x^2 = \frac{x+3}{2} \Rightarrow 2x^2 = x + 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \text{ ecuația având soluțiile } x_1 = -1 \text{ și } x_2 = 3/2.$$

Exerciții propuse : Să se determine $x \in \mathbf{R}$ astfel încât următoarele numere să fie , separat , termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice

- a) x, x^2 și x^3
- b) $1 + x^2, (2+x)^2, (4+x)^2$
- c) $a^2 + x, ab + x, b^2 + x$

Teoremă : În orice progresie aritmetică suma termenilor egal depărtați de termenii extremi este aceeași , adică dacă numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sunt în progresie aritmetică atunci $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$, adică pe caz general $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}$, $\forall k \geq 2$.

Ex.: $2, \underbrace{4, 6, \dots, 96, 98, 100}_{102}$

Folosind proprietatea de mai sus putem calcula suma

$$S = \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n}_{n+1} = (n+1) \cdot \underbrace{\frac{n}{2}}_{\text{grupe}} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Ex. propus: Să se calculeze sumele:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 100;$$

$$S_2 = 2 + 4 + 6 + \dots + 1000;$$

$$S_3 = 3 + 6 + 9 + \dots + 321;$$

$$S_4 = 7 + 14 + 21 + \dots + 777$$

Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice.

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$, o progresie aritmetică și fie S_n suma primilor n termeni ai săi adică

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Folosind relațiile din teorema de mai sus, $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$, obținem că

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

sau înlocuind pe a_n cu $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ obținem a doua formulă

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1) \cdot r] \cdot n}{2}$$

Numărul termenilor dintr-o sumă ai cărei termeni sunt într-o progresie aritmetică se calculează după formula

$$n = \frac{a_n - a_1 + r}{r}$$

$$\text{sau } n = \frac{u - p + r}{r}$$

unde $u =$ ultimul termen al sumei, $p =$ primul termen al sumei, $r =$ rația progresiei aritmetice.

Ex. rezolvat. Să se calculeze suma $S = 7 + 11 + 15 + \dots + 787$.

Rezolvare: Met I: Observăm că termenii sumei sunt în progresie aritmetică și sunt și de forma $4k + 3$, $k \geq 1$.

$$\text{Atunci } S = (4 \cdot 1 + 3) + (4 \cdot 2 + 3) + (4 \cdot 3 + 3) + \dots + (4 \cdot 196 + 3) = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 196) +$$

$$\underbrace{3 + 3 + 3 + \dots + 3}_{\text{de 196 de ori}} = 4 \cdot \frac{196(196+1)}{2} + 588 = 77812.$$

Met II: Folosim formula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ și obținem $S = \frac{(7 + 787) \cdot n}{2}$, iar pe n îl vom afla din relația

$$n = \frac{u - p + r}{r} = \frac{787 - 7 + 4}{4} = \frac{784}{4} = 196$$

$$\text{Așadar } S = \frac{(7 + 787) \cdot 196}{2} = \frac{794 \cdot 196}{2} = 77812.$$

Atenție: O sumă de numere naturale este tot un număr natural.

Exc propus: Să se calculeze sumele:

$$S_1 = 3 + 8 + 13 + \dots + 553;$$

$$S_2 = 1 + 6 + 11 + \dots + 2011;$$

$$S_3 = 3 + 8 + 13 + \dots + 2011;$$

$$S_4 = 4 + 10 + 16 + \dots + 904;$$

$$S_5 = 3 + 10 + 17 + \dots + 850;$$

$$S_6 = 4 + 8 + 12 + \dots + 2012.$$