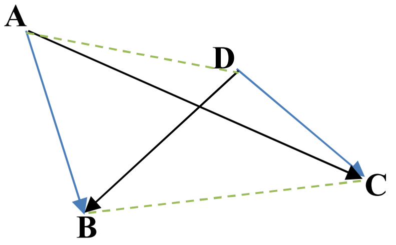
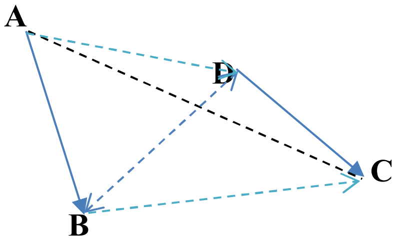
Vectori

Lucrare de control la MATEMATICA

1) Fie ABCD un patrulater în plan. Să se demonstreze că:

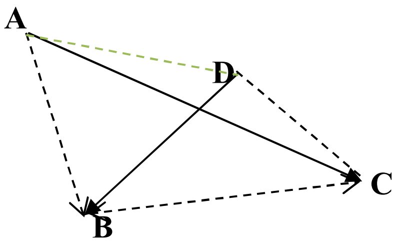
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$$





$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+2\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$$



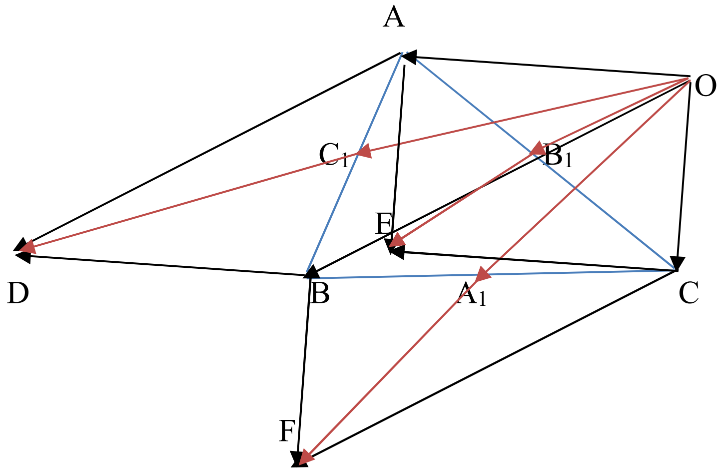
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$

2) Punctele A_1 , B_1 , C_1 sunt mijloacele laturilor: [BC], [AC], [AB], ale triunghiului *ABC*.

   a. Să se arate că, pentru orice punct O, din planul triunghiului, are loc relaţia:

   $$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}$$

   b. Calculaţi $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}$



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\cdot\overrightarrow{OC_1}$ în paralelogramul OADB

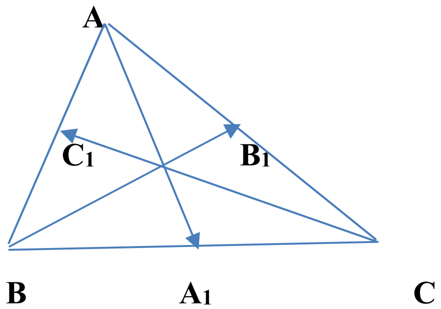
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\cdot\overrightarrow{OB_1}$ în paralelogramul OAEC

$\underline{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\cdot\overrightarrow{OA_1}}$ în paralelogramul OBFC

$2\cdot\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OB}+2\cdot\overrightarrow{OC}=2\cdot\overrightarrow{OC_1}+2\cdot\overrightarrow{OB_1}+2\cdot\overrightarrow{OA_1}\,|:2$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OA_1}$

b)



În ΔABA_1 avem: $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}$

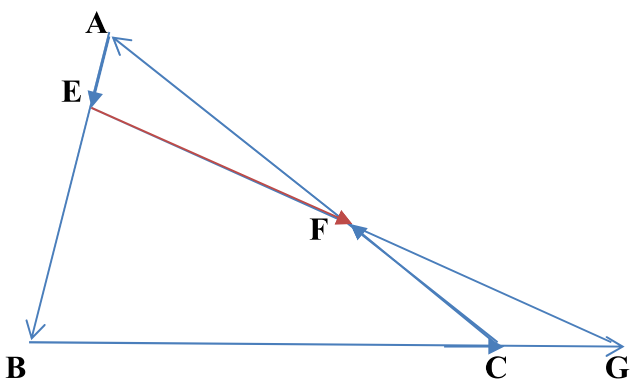
În ΔBCB_1 avem: $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}$

În ΔBCB_1 avem: $\underline{\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1}}\,(+)$

$$AA_1+BB_1+CC_1=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$$

3) Fie triunghiul ABC. Construiţi punctele E, F, G astfel încât : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$.

   a. Exprimați vectorul $\overrightarrow{EF}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$
   b. Arătaţi că punctele : E, F, G sunt coliniare.



$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

În ΔFEA avem $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

În ΔGFC avem $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$

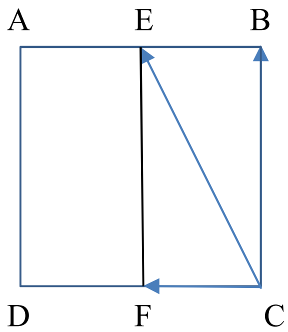
$$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} =$$

$$= \overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\left(-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{5}AB + \frac{6}{5}CA$$

În ΔGEB avem $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE} = -\frac{6}{5}\overrightarrow{BC} - \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} = -\frac{6}{5}\left(-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right) - \frac{4}{5}AB = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{5}CA$

$\Rightarrow \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE}$

4) Fie pătratul ABCD, de latură 3. Ştiind că F este mijlocul segmentului CD determinaţi modulul vectorului: $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CB}$.



În paralelogramul $CFEB$ avem $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CE}$

În triunghiul CBE dreptunghic: $CE^2 = CB^2 + BE^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 =^{4)} 9 + \frac{9}{4} = \frac{36+9}{4} = \frac{27}{4}$

$$CE = \left|\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$