BACALAUREAT 2000
SIMULARE - MARTIE
Varianta 1

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

Se dau funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 8x^2 - 8$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x$.

1. Să se calculeze $(f+g)\left(\frac{3}{4}\right)$ şi $(f+g)(1)$.

2. Să se arate că $f+g$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

3. Să se deducă din 1. şi 2. că ecuaţia $(f+g)(x) = 0$ are o singură rădăcină în intervalul $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$.

4. Se notează cu x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ şi cu $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze S_1, S_2 şi S_3.
b) Să se arate că $S_n \in \mathbb{Z}$, $(\forall)\ n \geq 1$.

SUBIECTUL II

Se consideră mulţimea $G = \left\{ A(x) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Să se arate că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

2. Folosind eventual rezultatul de la 1., să se arate că:

a) $A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.
b) $A(x) \cdot A(0) = A(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
c) $A(x) \cdot A(-x) = A(0)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
d) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

3. Să se calculeze $A^n(2)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

Se dă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{2 - \lg x}$, unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei.

1. Să se determine D.

2. Să se determine $x \in D$ astfel încât termenul al cincilea din dezvoltarea binomului $(1 + x^{f(x)})^6$ să fie 15.

3. **a)** Să se calculeze $f'(x)$ pentru $x \in (0, 100)$.
b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul $A(10, f(10))$.

SUBIECTUL IV

Se defineşte şirul $(I_n)_{n \geq 0}$ prin: $I_0 = \int_0^1 e^x\, dx$ şi $I_n = \int_0^1 x^n e^x\, dx$, $(\forall)\ n \geq 1$.

1. Să se calculeze I_0 şi I_1.

2. Utilizând integrarea prin părţi, să se demonstreze că $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$, $(\forall)\ n \geq 0$.

3. Să se arate că şirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este:

a) descrescător;
b) convergent.

4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$;
b) $\lim\limits_{n \to \infty} nI_n$.