

Varianta 2

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

Se consideră sistemul
$$\begin{cases} -ax + y + z = -1 \\ x - ay + z = a \\ x + y - z = 2 \end{cases},$$
 unde a este parametru real.

1. Să se determine valorile lui a pentru care sistemul are soluție unică.
2. Să se rezolve sistemul pentru $a = -1$.
3. Să se arate că pentru $a = 3$ sistemul nu are soluții.

SUBIECTUL II

Fie $P(X) = X^2 - 4X + 3$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, se definește șirul $(a_n)_{n \geq 4}$ prin $a_n = \frac{1}{P(4)} + \frac{1}{P(5)} + \frac{1}{P(6)} + \dots + \frac{1}{P(n)}$.

1. Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \geq 4}$ este crescător.
2. Să se arate că $a_n = \frac{(n-3)(3n-4)}{4(n-1)(n-2)}$, $(\forall) n \geq 4$.
3. Să se deducă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

SUBIECTUL III

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x^2 - 4x + 3)^{2n+1}$.

1. Să se arate că $f_n(x) \geq f_n(2)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
2. Dreapta $y = a$ cu $a > -1$ intersectează graficul funcției în punctele A și B . Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$.
3. a) Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f_2(x) = 0$.
b) Să se afle care dintre rădăcini sunt puncte de extrem ale funcției f_2 .
4. Să se calculeze $\int \frac{dx}{f_0(x)}$, $x \in (1, 3)$.

SUBIECTUL IV

Se dă polinomul $S(X) = (X^2 - 4X + 3)^7$.

1. a) Să se afle toate rădăcinile x_i , $1 \leq i \leq 14$ ale polinomului dat.
b) Să se calculeze $\sum_{i=1}^{14} x_i$ și $\sum_{i=1}^{14} \frac{1}{x_i}$.
2. Forma algebrică a polinomului dat este $S(X) = \sum_{k=0}^{14} a_k X^k$. Folosind eventual relațiile dintre rădăcini și coeficienți, să se deducă valorile coeficienților a_{13} și a_1 .
3. Să se demonstreze că există $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $S(\sqrt{2}) = p - q\sqrt{2}$.