

## Varianta 1

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

### SUBIECTUL I

1. Fie polinoamele  $f = mX^2 + 2(m+1)X + m$ ,  $m \in \mathbb{R}^*$  și  $g = X^2 + 3X + 9$ .
  - a) Dacă  $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$  sunt rădăcinile lui  $g$ , să se arate că  $y_1^3 = y_2^3 = 27$ .
  - b) Să se arate că  $f$  și  $g$  nu au nicio rădăcină comună,  $\forall m \in \mathbb{R}^*$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \arctan x + \cot^{-1} x$ .
  - a) Să se arate că  $f'(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
  - b) Deduceți că  $\arctan x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
3. În sistemul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0, 4)$ ,  $B(4, 0)$ ,  $C(6, 6)$ .
  - a) Să se determine punctul  $M(u, v)$  astfel încât  $MA = MB = MC$ .
  - b) Să se calculeze lungimea segmentului  $[MA]$ , unde  $M$  este punctul determinat la a).
  - c) Să se scrie ecuația cercului care trece prin punctele  $A, B, C$ .

### SUBIECTUL II

1. Fie matricele  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - a) Să se arate că  $AB = BA$ .
  - b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că  $(A+B)^n = A^n + B^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
  - c) Să se calculeze  $(A+B)^{2000}$ .
2.
  - a) Să se arate că  $1 - abc = 1 - a + a(1-b) + ab(1-c)$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ .
  - b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ .
  - c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \cos 5x}{x^2}$ .

### SUBIECTUL III

Fie mulțimea de numere reale  $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$ .

- a) Să se arate că dacă  $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$ , cu  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , atunci  $a = c$  și  $b = d$ .
- b) Să se arate că  $1 \in M$ .
- c) Să se demonstreze că  $M$  este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale.
- d) Să se demonstreze că dacă  $z \in M$ , atunci  $z \neq 0$  și  $\frac{1}{z} \in M$ .
- e) Să se găsească un element  $z \in M$ ,  $z = a + b\sqrt{3}$ , în care  $b \neq 0$ .

### SUBIECTUL IV

1. Să se determine  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$  astfel încât

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \frac{a_3}{x+3}, \forall x > 0.$$

2. Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{(e^x+1)(e^x+2)(e^x+3)}$  și  $g(x) = \frac{1}{e^x+a}$ ,  $a > 0$ .
  - a) Să se calculeze  $\int g(x) dx$ .
  - b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .