Varianta 1

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9+m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine valorile lui m pentru care $f(x)\geq 0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine punctul de minim și minimul funcției f.

2. Fie polinomul $f=X^3+X+1$. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X+2$.

3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, unde $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ și $b_n=9^n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii geometrice și să se determine rația fiecăreia.
În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n,b_n)$, $n\geq 1$.

b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2.

c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n,b_n)$ sunt situate pe dreapta A_1A_2, $\forall\, n\geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x\star y=-xy+5x+5y-20$.

a) Să se arate că legea este asociativă.

b) Să se arate că $x\star 4=x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că mulțimea $(-\infty,5)$ este parte stabilă în raport cu legea "$\star$".

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$.

a) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $f^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(2)}(0)+f^{(4)}(0)+\cdots+f^{(2n)}(0)}{n+1}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Definim $B=A+I_2$.

a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se arate că $B^2=2B-I_2$.

d) Să se demonstreze că B este inversabilă și să i se calculeze inversa.

e) Să se calculeze B^n, $\forall\, n\geq 1$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ astfel:

$$I_0=\int_0^1\frac{1}{x^2+6x+10}\,dx \text{ și } I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+6x+10}\,dx,\ n\geq 1.$$

1. Să se calculeze I_0 și I_1.

2. a) Să se demonstreze că $0\leq\dfrac{x^n}{x^2+6x+10}\leq x^n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\forall\, x\in[0,1]$.

b) Să se arate că $0\leq I_n\leq\dfrac{1}{n+1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}I_n$.