Varianta 2

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Fie polinoamele $f = mX^2 + 2(m+1)X + m$, $m \in \mathbb{R}^*$ și $g = X^2 + 2X + 4$.

a) Dacă $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui g, să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 8$.

b) Să se arate că f și g nu au nicio rădăcină comună, $\forall\, m \in \mathbb{R}^*$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x + \cot^{-1} x$. Să se calculeze $f''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(4,0)$, $C(6,6)$.

a) Să se determine determine coordonatele punctului M, mijlocul segmentului $[AB]$.

b) Să se scrie ecuația dreptei CM.

SUBIECTUL II

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.

b) Să se arate că $AB = BA$.

c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(A+B)^n = A^n + B^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{-1,-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$.

a) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (f(1) + f(2) + \cdots + f(n))$.

SUBIECTUL III

Fie mulțimea de numere reale $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 3b^2 = 1\}$.

a) Să se arate că dacă $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$, cu a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$, atunci $a = c$ și $b = d$.

b) Să se arate că $1 \in M$.

c) Să se demonstreze că M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale.

d) Să se demonstreze că dacă $z \in M$, atunci $z \neq 0$ și $\dfrac{1}{z} \in M$.

SUBIECTUL IV

1. Să se determine a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2},\ \forall\, x > 0.$$

2. Fie funcțiile f, g, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{e^x + a}$ cu $a > 0$, $g(x) = \dfrac{1}{(e^x+1)(e^x+2)}$ și $F(x) = \dfrac{1}{a}\,(x - \ln(e^x + a))$.

a) Să se arate că $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.