Varianta 3

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu a, b, $c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c astfel încât $f(0) = 2$, $f'(1) = 1$ și $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

2. Să se rezolve ecuația $C_n^2 = 10$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ definite prin:

$$a_n = n + 2 \text{ și } b_n = 3n - 2,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii aritmetice și să se determine rația fiecăreia.
În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n)$, $n \geq 1$.

b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2.

c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta A_1A_2, $\forall\, n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinoamele $f = X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 + 3X + 9$ cu rădăcinile y_1, $y_2 \in \mathbb{C}$.

a) Să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 27$.

b) Să se determine x_1, x_2, x_3.

d) Să se calculeze

$$A = (x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2)(x_3 - y_1)(x_3 - y_2).$$

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se studieze monotonia funcției f.

c) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficului funcției f.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

a) Să se arate că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Să se găsească o matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ cu $b \neq 0$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6^x + 35^x - 14^x - 15^x$.

a) Să se demonstreze că $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că

$$f^{(n)}(x) = (\ln 6)^n \cdot 6^x + (\ln 35)^n \cdot 35^x - (\ln 14)^n \cdot 14^x - (\ln 15)^n \cdot 15^x,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}.$$