SESIUNEA AUGUST
Varianta 1

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. **a)** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu a, b, $c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c astfel încât $f(0) = 2$, $f'(1) = 1$ și $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot$

b) Să se rezolve ecuația $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Să se determine toate numerele naturale n pentru care $C_n^2 < 10$.

3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ definite prin:

$$a_n = n + 2 \text{ și } b_n = 3n - 2,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii aritmetice și să se determine rația fiecăreia.
În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n)$, $n \geq 1$.

b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2.

c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta A_1A_2, $\forall\ n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinoamele $f = X^9 + X^8 + \cdots + X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, $\ldots$, $x_9 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile y_1, $y_2 \in \mathbb{C}$.

a) Să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.

b) Să se arate că polinomul f divide polinomul $X^{10} - 1$.

c) Să se deducă identitatea $x_k^{10} = 1$, $\forall\ k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

d) Să se calculeze valoarea expresiei

$$A = (x_1 - y_1)(x_2 - y_1)\ldots(x_9 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_2)\ldots(x_9 - y_2).$$

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}\cdot$

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se studieze monotonia funcției f.

c) Să se determine asimptota oblică la ramura către $+\infty$ a graficului funcției f.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

a) Să se arate că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Să se arate că dacă $A \in G$, atunci $A^{-1} \in G$.

d) Să se găsească o matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ cu $b \neq 0$.

e) Să se arate că mulțimea G conține o infinitate de elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6^x + \alpha^x - 14^x - 15^x$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

a) Să se calculeze $f'(x)$.

b) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.

c) Să se determine α astfel încât $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Considerăm $\alpha = 35$.

d) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

e) Să se demonstreze că dacă $0 < a < b < c < d$ și $a + d = b + c$, atunci $a^n + d^n > b^n + c^n$, $\forall\, n \geq 2$.

f) Deduceți că $f^{(n)}(0) > 0$, $\forall\, n \geq 2$.