Varianta 2

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9 + m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine valorile lui m pentru care $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine punctul de minim și minimul funcției f.

c) Pentru $m = 0$ să se determine valorile reale ale lui x pentru care $(f \circ f)(x) = 0$.

2. Fie polinomul $f = X^3 + X + 1$. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X + 2$.

3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, unde $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ și $b_n = 9^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii geometrice și să se determine rația fiecăreia.
În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n)$, $n \geq 1$.

b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2.

c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta A_1A_2, $\forall\, n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x \star y = -xy + 5x + 5y - 20$.

a) Să se arate că legea este asociativă.

b) Să se arate că $x \star 4 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că mulțimea $(-\infty, 5)$ este parte stabilă în raport cu legea "$\star$".

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$.

a) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(0) + f^{(2)}(0) + \cdots + f^{(n)}(0)}{2^n}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Definim $B = A + I_4$.

a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se arate că $B^2 = 2B - I_4$.

d) Să se demonstreze că B este inversabilă și să i se calculeze inversa.

e) Să se calculeze B^n, $\forall\, n \geq 1$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ astfel:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 6x + 10}\, dx \text{ și } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 6x + 10}\, dx,\ n \geq 1.$$

1. Să se calculeze I_0 și I_1.

2. Să se demonstreze că:

a) $I_{n+2}+6I_{n+1}+10I_n=\dfrac{1}{n+1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

b) $I_{n+1}\leq I_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

c) $17I_{n+2}\leq\dfrac{1}{n+1}\leq 17I_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

d) $\dfrac{1}{17(n+1)}\leq I_n\leq\dfrac{1}{17(n-1)}$, $\forall\, n\geq 2$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^a I_n$, unde $a\in\mathbb{R}$.