Varianta 3

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Fie polinoamele $f = mX^2 + 2(m+1)X + m$, $m \in \mathbb{R}^*$ și $g = X^2 + X + 1$.

a) Să se determine valorile lui m pentru care f are rădăcini egale.

b) Dacă $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui g, să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.

c) Să se arate că f și g au cel puțin o rădăcină comună dacă și numai dacă $m = -2$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x + \cot^{-1} x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Deduceți că $\arctan x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(4,0)$, $C(6,6)$.

a) Să se determine punctul $M(u,v)$ astfel încât $MA = MB = MC$.

b) Să se calculeze lungimea segmentului $[MA]$, unde M este punctul determinat la a).

c) Să sescrie ecuația cercului care trece prin punctele A, B, C.

SUBIECTUL II

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $AB = BA$.

b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(A+B)^n = A^n + B^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $(A+B)^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

2. **a)** Să se arate că $1 - abc = 1 - a + a(1-b) + ab(1-c)$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^5 2x}{x^2}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^5 2x \cdot \cos^3 3x \cdot \cos^2 5x}{x^2}$.

SUBIECTUL III

Fie mulțimea de numere reale $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 3b^2 = 1\}$.

a) Să se arate că dacă $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, atunci $a = c$ și $b = d$.

b) Să se arate că $1 \in M$.

c) Să se demonstreze că M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale.

d) Să se demonstreze că dacă $z \in M$, atunci $z \neq 0$ și $\dfrac{1}{z} \in M$.

SUBIECTUL IV

1. Să se determine $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \frac{a_3}{x+3},\ \forall x > 0.$$

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(e^x+1)(e^x+2)(e^x+3)}$ și $g(x) = \dfrac{1}{e^x + a}$, $a > 0$.

a) Să se calculeze $\int g(x)\,dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Considerăm șirul $(s_n)_{n\geq 1}$ definit prin $s_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{2n}\right) + f\left(\frac{3}{2n}\right) + \cdots + f\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right]$.

c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} s_n$.