

Varianta 3

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c astfel încât $f(0) = 1$, $f'(1) = 6$ și $f''(2) = 52$.
2. Se consideră polinomul $g = X^6 + X^2 + 1$.
 - a) Să se calculeze $(g(i))^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - b) Să se afle câtul și restul împărțirii lui g la $X^2 - 2$.
3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3, 3), B(5, 1), C(-4, 4)$.
 - a) Să se determine coordonatele punctului M , mijlocul segmentului $[AB]$.
 - b) Să se scrie ecuația dreptei CM .

SUBIECTUL II

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

- a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât determinantul matricei $A + X$ să fie egal cu 15.
- b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- c) Să se calculeze $A + A^2 + \dots + A^n, n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 1$.

- a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$.
- b) Să se calculeze cuprinsă între graficul funcției f și dreapta $y = 4$.
- c) Să se determine $a \in (-3, 1)$ astfel încât dreapta $x = a$ să despartă suprafața de la punctul anterior în două regiuni care au arii egale.

SUBIECTUL IV

Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x \star y = x + y - 3$.

- a) Să se arate că legea " \star " este comutativă.
- b) Să se arate că legea " \star " este asociativă.
- c) Să se arate că $x \star (6 - x) = 3, \forall x \in \mathbb{R}$.
- d) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de 40 ori } x} = 3$.