SESIUNEA IUNIE
Varianta 1

Profilul economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^5+bx^2+c$, unde a, b, c sunt parametri reali. Să se determine a, b şi c astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiţii:

$f(0)=1,\ f'(1)=36,\ \displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx=3.$

2. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ -2 & -4\end{pmatrix}$.

- **a)** Să se determine matricea A^2.
- **b)** Să se determine matricea $B=6A^5-3A^2+6I_2$.
- **c)** Să se calculeze determinantul matricei $B=6A^5-3A^2+6I_2$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(4,5)$, $B(-2,-3)$ şi $C(5,4)$.

- **a)** Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.
- **b)** Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
- **c)** Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+aX-5$, $a\in\mathbb{R}$. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, definim $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$, unde x_1, x_2, $x_3\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

- **a)** Să se arate că $S_3-3S_2+aS_1-15=0$.
- **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $S_3=-21$.

2. Se consideră $I(t)=\displaystyle\int_0^t(\cos x+2\sin x)\ dx$, $t\in(0,\infty)$.

- **a)** Să se determine $I(t)$, $t\in(0,\infty)$.
- **b)** Să se calculeze $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{I(t)}{t}$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x\star y=xy-4x-4y+20$, oricare ar fi x, $y\in\mathbb{R}$.

- **a)** Să se arate că legea este asociativă.
- **b)** Să se determine $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\star e=x$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

  Fie mulţimea $G=(4,\infty)$.
- **c)** Să se arate că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$".
- **d)** Să se rezolve în G ecuaţia $\underbrace{x\star x\star\ldots\star x}_{\text{de 10 ori } x}=5$.

SUBIECTUL IV

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\backslash\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-3}$, unde a, b, c parametri reali. Să se determine a, b şi c astfel încât graficul funcţiei f să admită asimptota $y=x+2$, iar punctul $A(1,1)$ să se afle pe grafic.

2. Se consideră funcţia $g:\mathbb{R}\backslash\{3\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$.

a) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei g.

b) Să se arate că $g(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-3}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $g^{(n)}(x) = (-1)^n (n!) \dfrac{4}{(x-3)^{n+1}}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$.