## Varianta 3

Profilul economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

### SUBIECTUL I

**1.** Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = x + y + 4$, pentru orice $x,\ y \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.
- **b)** Să se arate că $e = -4$ este elementul neutru al legii "$\star$".
- **c)** Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relaţia $x \star (-x - 8) = -4$.

**2.** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = xe^x$.

- **a)** Să se determine $f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se rezolve ecuaţia $f'(x) = 0$.
- **c)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.

**3.** În sistemul cartezian de coordonate $xOy$ se consideră cercul de ecuaţie $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 25$.

- **a)** Să se determine coordonatele centrului şi raza cercului.
- **b)** Să se verifice că punctul $P(9, 7)$ este situat pe cerc.
- **c)** Să se scrie ecuaţia tangentei la cerc în punctul $P(9, 7)$.

### SUBIECTUL II

**1.** În $\mathbb{C}[X]$, mulţimea polinoamelor cu coeficienţi complecşi, se consideră polinomul $f = (X + i)^7 + (X - i)^7$, cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_7 \in \mathbb{C}$.

- **a)** Să se calculeze $f(0)$.
- **b)** Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_7X^7 + a_6X^6 + \ldots + a_1X + a_0$, determinaţi coeficienţii $a_7$, $a_6$ şi $a_5$.
- **c)** Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_7$.

**2.** Se consideră funcţiile $f,\ F : (-1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)^2 \ln(x+1)$ şi $F(x) = \dfrac{(x+1)^3}{3} \ln(x+1) - \dfrac{(x+1)^3}{9} + \dfrac{1}{9}$.

- **a)** Să se arate că $F$ este o primitivă a funcţiei $f$.
- **b)** Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^2}$.

### SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordinul doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

- **a)** Să se calculeze $A^2$.
- **b)** Să se determine $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, astfel încât determinantul matricei $X + A$ să fie egal cu 2.
- **c)** Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.
- **d)** Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A + 2A^2 + \ldots + nA^n = \dfrac{n(n+1)}{2} A$.

### SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f,\ F : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ şi $F(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Pentru $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$, definim şirul $a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

**a)** Să se arate că $F$ este o primitivă a funcţiei $f$.

**b)** Utilizând teorema lui Lagrange să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, există $c_k \in (k, k+1)$ astfel încât $F(k+1) - F(k) = f(c_k)$.

**c)** Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, au loc inegalităţile:

$$(k+1)^{\frac{3}{2}} < F(k+1) - F(k) < k^{\frac{3}{2}}.$$

**d)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător.

**e)** Utilizând rezultatul de la punctul c), să se demonstreze că $a_n < 3$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

**f)** Deduceţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.