Varianta 4

Profilul economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 1 + m$, unde m este un parametru real.

- **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ atfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- **b)** Să se verifice că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{7} - 2) = f(-\sqrt{7} - 2)$.

2. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = x + y - 4$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se arate că legea ”$\star$” este asociativă.
- **b)** Să se arate că $e = 4$ este elementul neutru al legii ”$\star$”.
- **c)** Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relaţia $x \star (-x + 8) = 4$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(5, 6)$, $B(-1, -2)$ şi $C(6, 5)$.

- **a)** Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.
- **b)** Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
- **c)** Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = (X + 1)^5 + (X - 1)^5$, cu rădăcinile x_1, x_2, $\ldots$, $x_5 \in \mathbb{C}$.

- **a)** Să se calculeze $f(0)$.
- **b)** Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_5X^5 + a_4X^4 + \ldots + a_1X + a_0$, determinaţi coeficienţii a_5, a_4 şi a_3.
- **c)** Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_5$.
- **d)** Să se calculeze suma $T = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}\cdot$

- **a)** Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) = \dfrac{a}{x + 1} + \dfrac{b}{x - 1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
- **b)** Să se calculeze $\displaystyle\int_2^3 f(x)\, dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ şi $C = A + B$.

- **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.
- **b)** Să se demonstreze că $\operatorname{rang}(A + B) = 3$.
- **c)** Să se arate că $A^2 = -6A$ şi $B^2 = 6B$.
- **d)** Să se arate că $AB = BA$.
- **e)** Să se demonstreze prin inducţie că dacă matricea $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = tX$, $t \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $X^n = t^{n-1}X$.
- **f)** Să se determine matricea C^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Pentru orice $x \in [0, 1)$ se defineşte suma

$$S_n(x) = \sqrt{2+x} + x\sqrt{2+x} + \ldots + x^{n-1}\sqrt{2+x},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \sqrt{2+x} \cdot \dfrac{1-x^n}{1-x}$, $x \in [0, 1)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2+x}\ dx$.