Varianta 5

Profilul economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1+m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ atfel încât pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$.

b) Să se verifice că pentru orice $m\in\mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{5}-2)=f(-\sqrt{5}-2)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3\ln x$.

a) Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x\in(0,\infty)$.

b) Să se determine primitivele funcţiei f, $\displaystyle\int f(x)\,dx$, $x\in(0,\infty)$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii $d_1:\ x+2y-3=0$, $d_2:\ 2x+y-3=0$ şi $d_3:\ 3x+2y-5=0$.

a) Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.

b) Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.

c) Să se scrie ecuaţia cercului de centru $O(0,0)$ care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+aX+1$, $a\in\mathbb{R}$ care are rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3\in\mathbb{C}$.
Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, definim $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$.

a) Să se arate că $S_3+S_2+aS_1+3=0$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $S_3=-1$.

2. Se consideră funcţiile $f,\ F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a\sin x+b\sin 3x+c\sin 5x$ şi $F(x)=-a\cos x-\dfrac{b}{3}\cos 3x-\dfrac{c}{5}\cos 5x$.

a) Să se arate că $F'(x)=f(x)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $F\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$, pentru orice $k\in\mathbb{Z}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III

a) În mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$, să se demonstreze că dacă $z_1,\ z_2\in\mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}.$$

Se notează cu $\overline{z}$ conjugatul lui z.
Se consideră $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{C}$, şi submulţimea
$H=\left\{A=\begin{pmatrix} z & -\overline{w}\\ w & \overline{z}\end{pmatrix}\ \middle|\ z,w\in\mathbb{C}\right\}$.

b) Să se demonstreze că pentru orice $A,\ B\in H$, matricea $A+B\in H$.

c) Să se verifice că matricea $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ aparţine mulţimii H.

d) Să se arate că dacă $A\in H$, atunci $-A\in H$.

e) Să se arate că submulţimea H a lui $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, împreună cu operaţia de adunare indusă, formează o structură de grup comutativ.

f) Să se demonstreze că dacă $A \in H$ şi are determinantul zero, atunci $A = O_2$.

SUBIECTUL IV

Se defineşte şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel: $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+3}\,dx$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+3}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $I_{n+1} + 3I_n = \dfrac{1}{n+1}\cdot$

c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $I_{n+1} \leq I_n$.

d) Utilizând punctele b) şi c), să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, au loc inegalităţile:

$$4I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 4I_n.$$

e) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, avem

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{4n}\cdot$$

f) Să se arate că limita şirului $(nI_n)_{n\geq 1}$ este egală cu $\dfrac{1}{4}\cdot$