

Varianta 7

Profilul economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 2X^3 - 3X^2 - 17X + 30$.
 - Să se calculeze $f(2)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X - 2$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $2e^{3x} - 3e^{2x} - 17e^x + 30 = 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -2)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.
 - Să se determine coordonatele punctului C și lungimea segmentului $[AB]$.
 - Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$.
 - Să se scrie ecuația tangentei la cercul de diametru $[AB]$ care trece prin punctul $D(4, 5)$.

SUBIECTUL II

- Se consideră sistemul
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = -2 \\ mx - y + 3z = -1 \end{cases}$$
, unde m este un parametru real, și A matricea sistemului.
 - Să se calculeze determinantul matricei A .
 - Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.
 - Pentru $m = 4$ să se rezolve sistemul.
- Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, are loc identitatea:

$$x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Derivând ambii membri ai identității de la punctul a), să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- Să se arate că legea " \star " este asociativă și comutativă.
- Să se determine elementul neutru al legii " \star ".
- Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$\underbrace{x \star x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ și $g : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{3x + 1}$.

- a) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$,

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{3^n}{(3x+1)^{n+1}}.$$

- b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

- c) Să se calculeze $\int_2^3 f(x) dx$.