Varianta 10

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = 6X^3 - 5X^2 - 2X + 1$.

a) Să se calculeze $f(1)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X - 1$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $6(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - 2\ln x + 1 = 0$, $x > 0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii $d_1 : x + 2y + 6 = 0$, $d_2 : 2x + y + 6 = 0$ şi $d_3 : 3x + 2y + 10 = 0$.

a) Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.

b) Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.

c) Să se scrie ecuaţia cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

1. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = 3xy - 6x - 6y + 14$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea ”$\star$” este asociativă şi comutativă.

b) Să se determine elementul neutru al legii ”$\star$”.

c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$\underbrace{x \star x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 3^{n-1}(x - 2)^n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Se consideră funcţiile $f, F : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^2 \ln(x + 1)$ și $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{3} \ln(x + 1) - \dfrac{(x + 1)^3}{9} + \dfrac{1}{9}$.

a) Să se calculeze $F(0)$.

b) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se definește matricea $B_n = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n$.

a) Să se determine A^2 și A^3.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Să se determine matricea B_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră integralele $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4 - x^2}\, dx$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4 - x^2}\, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se arate că pentru orice $x \in [0, 1]$, $0 \le \dfrac{x^n}{4 - x^2} \le x^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se demonstreze că $0 \le I_n \le \dfrac{1}{n + 1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.