

Varianta 3

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

- Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$ și $g(x) = -x^2 + 8x - 13$.
 - Să se arate că $f(x) - g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficele funcțiilor f și g , și dreptele de ecuații $x = -1$, $x = 0$.
- Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y + 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că legea " \star " este asociativă.
 - Să se arate că $e = -4$ este elementul neutru al legii " \star ".
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuație $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$.
 - Să se determine coordonatele centrului și raza cercului.
 - Să se verifice că punctul $P(9, 7)$ este situat pe cerc.
 - Să se scrie ecuația tangentei la cerc în punctul $P(9, 7)$.

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = (X + i)^5 + (X - i)^5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_5 \in \mathbb{C}$.
 - Să se calculeze $f(0)$.
 - Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_5X^5 + a_4X^4 + \dots + a_1X + a_0$, determinați coeficienții a_5 , a_4 și a_3 .
 - Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \dots + x_5$.
- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = A + B$.

- Să se calculeze determinantul matricei A .
- Să se demonstreze că $\text{rang}(A + B) = 3$.
- Să se arate că $A^2 = -6A$ și $B^2 = 6B$.
- Să se arate că $AB = BA$.
- Să se demonstreze prin inducție că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = tX$, $t \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $X^n = t^{n-1}X$.
- Să se calculeze matricea C^8 .

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f, F: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^2 \ln(x + 1)$ și $F(x) = \frac{(x + 1)^3}{3} \ln(x + 1) - \frac{(x + 1)^3}{9} + \frac{1}{9}$.

- Să se arate că F este o primitivă a funcției f .
- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2}$.
- Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.