Varianta 4

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+1+m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$.

b) Să se verifice că pentru orice $m\in\mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{7}-2)=f(-\sqrt{7}-2)$.

2. Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x\star y=x+y-4$, pentru orice $x,\ y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea ”$\star$” este asociativă.

b) Să se arate că $e=4$ este elementul neutru al legii ”$\star$”.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(5,6)$, $B(-1,-2)$ și $C(6,5)$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.

b) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

c) Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f=(X+1)^5+(X-1)^5$, cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5\in\mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Considerând forma algebrică a polinomului $f=a_5X^5+a_4X^4+\cdots+a_1X+a_0$, determinați coeficienții a_5 și a_4.

c) Să se calculeze suma $S=x_1+x_2+\cdots+x_5$.

2. Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\backslash\{1\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=4x-1+\dfrac{1}{1-x}\cdot$

a) Să se determine g'.

b) Să se stabilească semnul funcției g' și să se precizeze intervalele de monotonie ale funcției g.

c) Să se stabilească semnul funcției g.

d) Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficul funcției g, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$, $x=\dfrac{3}{4}\cdot$

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=A$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $A+2A^2+\cdots+nA^n=\dfrac{n(n+1)}{2}A$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul (I_n) astfel: $I_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx$ și $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x+1}\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0 și I_1.

b) Să demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1}\cdot$

c) Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}\leq I_n$.