Varianta 7

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = 2X^3 - 3X^2 - 17X + 30$.

a) Să se calculeze $f(2)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X - 2$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $2e^{3x} - 3e^{2x} - 17e^x + 30 = 0$.

3. Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 60x - 10$. Să se stabilească semnul funcției g'.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -2)$ şi C mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Să se determine coordonatele punctului C și lungimea segmentului $[AB]$.

b) Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$.

c) Să se verifice dacă punctul $D(4, 5)$ este situat pe cercul de diametru $[AB]$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = -2 \\ mx - y + 3z = -1 \end{cases}$, unde m este un parametru real, şi A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Pentru $m = 4$ să se rezolve sistemul.

2. **a)** Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, are loc identitatea:

$$x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}, \; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Derivând ambii membri ai identităţii de la punctul a), să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1}{(x - 1)^2}.$$

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, oricare ar fi x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea ”$\star$” este asociativă şi comutativă.

b) Să se determine elementul neutru al legii ”$\star$”.

c) Să se demonstreze că mulţimea $G = (3, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea ”$\star$”.

SUBIECTUL IV

Se consideră integralele $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4 + x^2}\, dx$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4 + x^2}\, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se arate că pentru orice $x \in [0, 1]$, $\leq \dfrac{x^n}{4 + x^2} \leq x^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se demonstreze că $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n + 1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se determine limita şirului $(I_n)_{n \geq 1}$.