SESIUNEA IUNIE
Varianta 1

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + bx^2 + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b şi c astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiţii:

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 36, \quad \int_0^1 f(x)\,dx = 3.$$

2. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- **a)** Să se determine matricele A^2 şi A^3.
- **b)** Să se determine matricea $B = 6A^5 - 3A^2 + 6I_2$.
- **c)** Să se calculeze determinantul matricei B.

3. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(25^x + 7) = 2 + \log_2(5^x + 1)$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(4,5)$, $B(-2,-3)$ şi $C(5,4)$.

- **a)** Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.
- **b)** Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
- **c)** Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX - 5$, $a \in \mathbb{R}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

- **a)** Să se arate că $S_3 - 3S_2 + aS_1 - 15 = 0$.
- **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = -21$.

2. Se consideră funcţiile f, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\sin x$, $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x}\sin x - \dfrac{1}{2}e^{-x}\cos x$ şi $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$.

- **a)** Să se arate că F este o primitivă a funcţiei f.
- **b)** Să se calculeze I_0 şi să se arate că $I_k = (-1)^k e^{-k\pi} I_0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ şi submulţimea sa $G = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 2b^2 = 1\}$.

- **a)** Să se demonstreze că dacă a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ şi $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, atunci $a = c$ şi $b = d$.
- **b)** Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ faţă de operaţia de înmulţire a numerelor reale.
- **c)** Să se arate că dacă $x = a + b\sqrt{2}$ şi $x \in G$, atunci $x \neq 0$ şi $\dfrac{1}{x} \in G$.
- **d)** Să se găsească un element $x = a + b\sqrt{2} \in G$ cu proprietatea că $b \neq 0$.
- **e)** Să se arate că mulţimea G are cel puţin 200 de elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\dfrac{3}{7}\right)^x + \left(\dfrac{4}{7}\right)^x - 1$ şi $g(x) = f(x) - 1 + x$.

a) Să se determine $g'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se stabilească semnul funcţiei g'' şi să se precizeze monotonia funcţiei g'.

c) Utilizând teorema lui Rolle pentru funcţia g să se demonstreze că există $c \in (0, 1)$ astfel încât $g'(c) = 0$. Să se arate că punctul c este unic.

d) Deduceţi că funcţia g este strict descrescătoare pe $(0, c)$ şi strict crescătoare pe $(c, 1)$, unde c este definit la punctul c).

e) Să se arate că pentru orice $x \in [0, 1]$, $g(x) \leq 1$.

f) Să se arate că aria suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$, $x = 1$, este mai mică decât $\frac{1}{2}$.