Varianta 2

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = X^3 + 6X^2 + 11X + 6$.

- **a)** Să se calculeze $f(-1)$.
- **b)** Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X + 1$.
- **c)** Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve inecuaţia $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n \geq 64$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Se consideră funcţia $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{6x^5 + 3x^2 + 1}{x^4}$. Să se stabilească asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei g.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(-3, -4)$ şi $C(3, -4)$.

- **a)** Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.
- **b)** Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
- **c)** Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se arate că legea "$\star$" este asociativă şi comutativă.
- **b)** Să se determine elementul neutru legii "$\star$".
- **c)** Considerăm mulţimea $G = (3, \infty)$. Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$".

2. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x3^x)$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ se defineşte $I_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{3^k x}{1 + k3^k x^2}\, dx$.

- **a)** Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{2x}$.
- **b)** Să se calculeze I_k, $k \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

1. Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y)$.

2. Se consideră a, b, c, d numere reale distincte două câte două. Se definesc funcţiile f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ şi $g(x) = x^2 + x + 1$.

- **a)** Să se arate că $f'(x) = (a - b)(a - c)(a - d)$.
- **b)** Să se demonstreze că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ g(a) & g(b) & g(c) & g(d) \end{vmatrix} = 0$.
- **c)** Dezvoltând determinantul Δ după ultima linie, deduceţi identitatea

$$\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} + \frac{g(d)}{f'(d)} = 0.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{3}{8}\right)^x + \left(\frac{5}{8}\right)^x - 1$ şi $g(x) = f(x) - 1 + x$.

a) Să se determine $g'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se stabilească semnul funcţiei g'' şi să se precizeze monotonia funcţiei g'.

c) Utilizând teorema lui Rolle pentru funcţia g să se demonstreze că există $a \in (0, 1)$ astfel încât $g'(a) = 0$. Să se arate că punctul a este unic.

d) Deduceţi că funcţia g este strict descrescătoare pe $(0, a)$ şi strict crescătoare pe $(a, 1)$, unde a este definit la punctul c).

e) Deduceţi că pentru orice $x \in [0, 1]$, $g(x) \leq 0$.

f) Să se arate că aria suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$, $x = 1$, este mai mică decât $\frac{1}{2}$.