Varianta 3

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

a) Să se determine $f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuaţia $f'(x) = 0$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\, dx$.

2. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = x + y + 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.

b) Să se arate că $e = -4$ este elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relaţia $x \star (-x - 8) = -4$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuaţie $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 169$.

a) Să se determine coordonatele centrului şi raza cercului.

b) Să se verifice că punctul $P(2, 7)$ este situat pe cerc.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la cerc în punctul $P(2, 7)$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $(1 + X + X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică $f = a_{20}X^{20} + \ldots + a_1X + a_0$.

a) Să se determine a_0 şi a_1.

b) Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$, $f(i)$.

c) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

d) Să se arate că $a_0 + a_4 + \ldots + a_{16} + a_{20} = \frac{1}{4}(f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i))$.

2. Se consideră funcţiile $f, F : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 \ln(x+1)$ şi $F(x) = \frac{(x+1)^3}{3} \ln(x+1) - \frac{(x+1)^3}{9} + \frac{1}{9}$.

a) Să se arate că pentru orice $x \in (-1, \infty)$, $F'(x) = f(x)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ şi $C = aA + bB$, unde a, b sunt parametri reali.

a) Să se calculeze determinantul matricei A şi să se determine rangul ei.

b) Să se demonstreze că $\text{rang}(aA + bB) = 3$ dacă şi numai dacă $ab \neq 0$.

c) Să se arate că $A^2 = -6A$ şi $B^2 = 6B$.

d) Să se arate că $AB = BA$.

e) Să se demonstreze prin inducţie că dacă matricea $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = tX$, $t \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $X^n = t^{n-1}X$.

f) Să se determine matricea C^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f, F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^b}$ şi $F(x) = \frac{1}{1 - b}x^{1-b}$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, definim şirul $a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

a) Să se arate că F este o primitivă a funcţiei f.

b) Utilizând teorema lui Lagrange să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, există $c_k \in (k, k+1)$ astfel încât $F(k+1) - F(k) = f(c_k)$.

c) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, au loc inegalităţile:

$$\frac{1}{(k+1)^b} < F(k+1) - F(k) < \frac{1}{k^b}.$$

d) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător.

e) Utilizând rezultatul de la punctul c), să se demonstreze că $a_n < \dfrac{b}{b-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

f) Deduceţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.