Varianta 4

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 1 + m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

b) Să se verifice că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{7} - 2) = f(-\sqrt{7} - 2)$.

2. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = x + y - 4$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.

b) Să se arate că $e = 4$ este elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relaţia $x \star (-x + 8) = 4$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(5, 6)$, $B(-1, -2)$ şi $C(6, 5)$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.

b) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

c) Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $(1 - X + X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică $f = a_{20}X^{20} + \ldots + a_1X + a_0$.

a) Să se determine a_0 şi a_1.

b) Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$, $f(i)$.

c) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

d) Să se arate că $a_0 + a_4 + \ldots + a_{16} + a_{20} = \frac{1}{4}(f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i))$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$.

a) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_2^3 f(x)\, dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ şi $C = aA + bB$, unde a, b sunt parametri reali.

a) Să se calculeze determinantul matricei A şi să se determine rangul ei.

b) Să se demonstreze că $\operatorname{rang}(aA + bB) = 3$ dacă şi numai dacă $ab \neq 0$.

c) Să se arate că $A^2 = 6A$ şi $B^2 = -6B$.

d) Să se arate că $AB = BA$.

e) Să se demonstreze prin inducţie că dacă matricea $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = tX$, $t \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $X^n = t^{n-1}X$.

f) Să se determine matricea C^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile f, $F : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \ln(1 + \ln x)$ şi $f(x) = \dfrac{1}{x(1 + \ln x)}$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definim şirul $a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

a) Să se arate că F este o primitivă a funcţiei f.

b) Utilizând teorema lui Lagrange să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, există $c_k \in (k, k+1)$ astfel încât $F(k+1) - F(k) = f(c_k)$.

c) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, au loc inegalităţile:

$$\frac{1}{(k+1)(1+\ln(k+1))} < F(k+1) - F(k) < \frac{1}{k(1+\ln k)}.$$

d) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 2}$ este crescător.

e) Utilizând rezultatul de la punctul c), să se demonstreze că $a_n \geq F(n+1) - F(2)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

f) Deduceţi că limita şirului $(a_n)_{n\geq 2}$ este $+\infty$.