Varianta 5

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1 + m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

b) Să se verifice că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{5} - 1) = f(-\sqrt{5} - 1)$.

2. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(9^x + 7) = 2 + \log_2(3^x + 1)$.

3. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \ln x$

a) Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.

b) Să se determine primitiva $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ a funcţiei f care are proprietatea $F(1) = 0$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii: $d_1 : x+2y-3 = 0$, $d_2 : 2x+y-3 = 0$ şi $d_3 : 3x + 2y - 5 = 0$.

a) Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.

b) Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.

c) Să se scrie ecuaţia cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + 1$, $a \in \mathbb{R}$ şi x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.

a) Să se arate că $S_3 + S_2 + aS_1 + 3 = 0$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = -1$.

2. Se consideră funcţiile f, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a \sin x + b \sin 3x + c \sin 5x$ şi $F(x) = -a \cos x - \frac{b}{3} \cos 3x - \frac{c}{5} \cos 5x$.

a) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.

b) Să se calculeze $F\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

c) Să se arate că dacă $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci F este identic zero.

SUBIECTUL III

a) În mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$, să se demonstreze că dacă z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},\ \overline{\overline{z_1}} = z_1.$$

Se notează cu $\overline{z}$ conjugatul lui z.

Se consideră $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{C}$, şi submulţimea $H = \left\{ A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \middle|\ z, w \in \mathbb{C} \right\}$.

b) Să se demonstreze că pentru orice A, $B \in H$, matricea $A \cdot B \in H$.

c) Să se demonstreze că dacă $A \in H$ şi are determinantul zero, atunci $A = O_2$.

d) Să se arate că dacă $A \in H$ şi $A \neq O_2$, atunci $A^{-1} \in H$.

e) Să se găsească A, $B \in H$ având proprietatea $A \cdot B \neq B \cdot A$.

SUBIECTUL IV

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcţia $f_n : \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin^n x}{9 + \cos^2 x}$, şi integrala $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f_n(x)\, dx$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se determine derivata $f_n'(x)$, $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că funcţia f_n este crescătoare.

d) Să se demonstreze că pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ are loc relaţia $0 \le f_n(x) \le f_n\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Să se arate că $0 \le I_n \le f_n\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se determine limita şirului $(I_n)_{n\ge 1}$.