Varianta 6

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţiile $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x + 1$ şi $g(x) = -x^2 + 4x - 17$.

a) Să se arate că $f(x) - g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane limitate de graficele funcţiilor f şi g, şi dreptele de ecuaţii $x = -1$, $x = 0$.

2. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = x + y - 10$, pentru orice $x,\ y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea "$\star$" este comutativă.

b) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.

c) Să se arate că $e = 10$ este elementul neutru al legii "$\star$".

d) Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relaţia $x \star (-x + 20) = 10$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuaţie $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

a) Să se determine coordonatele centrului şi raza cercului.

b) Să se verifice că punctul $P(9, 7)$ este situat pe cerc.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la cerc în punctul $P(9, 7)$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $(1 - 2X + X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică $f = a_{20}X^{20} + \ldots + a_1X + a_0$.

a) Să se determine a_0 şi a_1.

b) Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$, $f(i)$.

c) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

d) Să se arate că $a_0 + a_4 + \ldots + a_{16} + a_{20} = \dfrac{1}{4}(f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i))$.

2. Se consideră funcţiile $f,\ F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x$ şi $F(x) = a\sin x + \dfrac{b}{2}\sin 2x + \dfrac{c}{3}\sin 3x$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $F(k\pi)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

c) Să se arate că dacă $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci F este identic zero.

SUBIECTUL III

a) În mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$, să se demonstreze că dacă $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},\ \overline{\overline{z_1}} = z_1.$$

Se notează cu $\overline{z}$ conjugatul lui z.

Se consideră $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{C}$, şi submulţimea

$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \,\middle|\, z, w \in \mathbb{C} \right\}$.

b) Să se demonstreze că pentru orice $A,\ B \in H$, matricea $A \cdot B \in H$.

c) Să se demonstreze că dacă $A \in H$ şi are determinantul zero, atunci $A = O_2$.

d) Să se arate că dacă $A \in H$ şi $A \neq O_2$, atunci $A^{-1} \in H$.

e) Să se găsească $A,\ B \in H$ având proprietatea $A \cdot B \neq B \cdot A$.

SUBIECTUL IV

Se consideră $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx$ şi $I_k = \int_0^1 x^k \cdot \sqrt{1-x}\, dx$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se demonstreze că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $I_k = \dfrac{2k}{2k+3} \cdot I_{k-1}$.

c) Pentru $x \in [0,1)$ se defineşte suma $S_n(x) = \sqrt{1-x} + x\sqrt{1-x} + \ldots + x^{n-1}\sqrt{1-x}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.