Varianta 7

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = 2X^3 - 3X^2 - 17X + 30$.

a) Să se calculeze $f(2)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X - 2$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $2e^{3x} - 3e^{2x} - 17e^{x} + 30 = 0$.

3. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^x (6t^2 - 6t - 17)\, dt + 30 = 0$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -2)$ şi C mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Să se determine coordonatele punctului C şi lungimea segmentului $[AB]$.

b) Să se scrie ecuaţia cercului de diametru $[AB]$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la cercul de diametru $[AB]$ care trece prin punctul $D(4, 5)$.

SUBIECTUL II

1. În mulțimea matricelor pătratice de ordinul trei peste $\mathbb{C}$, se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricele A^2 şi A^3.

b) Să se arate că pentru orice $z \in \mathbb{C}$ determinantul matricei $I_3 + zA$ este egal cu 1.

c) Să se demonstreze că $I_3 = (I_3 + A)(I_3 - A + A^2)$.

d) Să se arate că matricea $I_3 + A$ este inversabilă şi să se precizeze inversa sa.

2. **a)** Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, are loc identitatea:

$$x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}.$$

b) Derivând ambii termeni ai identităţii de la punctul a), să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă şi comutativă.

b) Să se determine elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$ şi se defineşte şirul (I_n) astfel: $I_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + 2I_{n+1} + 2I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$.

d) Utilizând punctele b) şi c) să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $5I_{n+2} \leq \dfrac{1}{n+1} \leq 5I_n$.

e) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\dfrac{1}{5(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{5(n-1)}$.

f) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = f(1)$.